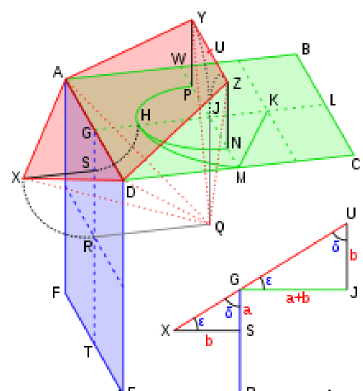
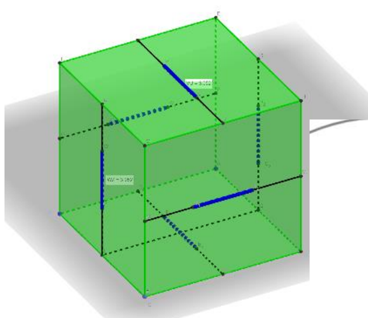
Poliedrele regulate-construcție geometrică și istorie

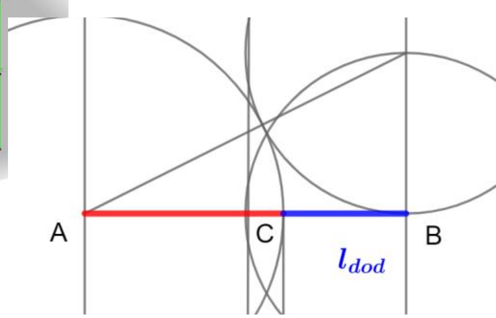
Poliedrele regulate se înscriu în sferă, ca și poligoanele regulate în cerc . Sunt 5 și fac o armonie deplina când intra în aceeași sferă. Au fost găsite de greci și mai târziu revăzute de marii maeștrii, ca Dürer, Da Vinci, Kepler și mai târziu de Euler și Gauss.

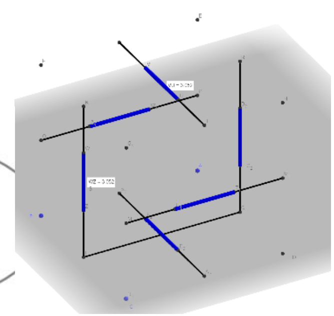
Pitagora, în sec 6 BC era mândru de gândirea sa avansată și avea ca emblemă pentagonul stelat. *Plato* (400 BC) le-a legat de filozofie și misticism-fără dodecaedru, iar Pappus (350 AD) le-a construit geometric. *Euclid* (300 BC), fondatorul principiilor geometriei clasice, în cartea sa Elementele a definit și poliedrele regulate (cap 13-propozitiile 13-17)



Copie după Elementele-sec 2 AD, Euclid, portret de Ribera-1630 (Getty Museum) și Construcția geometrica a dodecagonului-din Elemente.







Încep cu **dodecaedron**, sau **dodecaedrul**, care are 12 fețe pentagoane regulate. Ca și icosaedrul, fratele mai mic, se înscrie perfect în **cubul-minune-**verde, și are câte o latură pe linia mediană a fiecărei fețe.

Construcția geometrică-folosim geogebra 3D.

Se pornește de la latura cubului verde AB pe care se găsește punctul C care împarte segmentul-latura cubului în medie și extrema rație

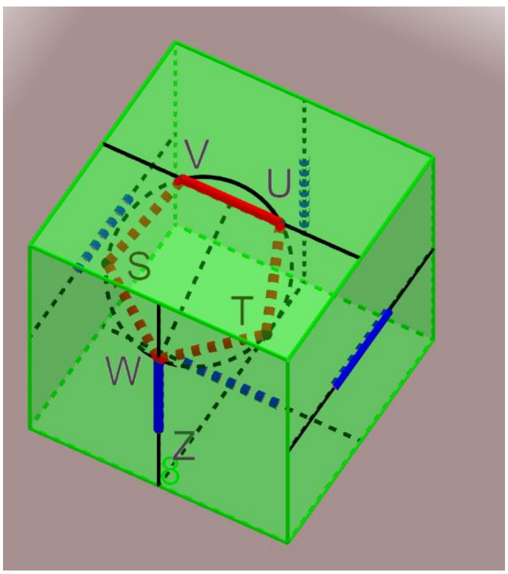
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC} = \emptyset = 1{,}618$$

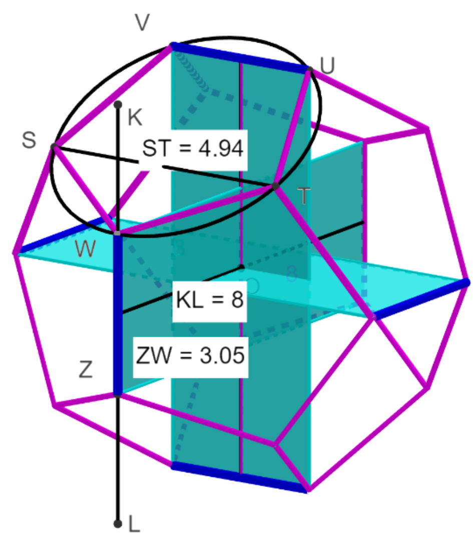
$$l_{dodecaedron} = BC$$

Pe medianele fețelor cubului verde se construiesc cele 6 segmente-albastre care definesc laturile de pornire ale solidului-dodecaedru.

KL=8 este latura cubului și WZ=3,056 este latura dodecaedrului

$$\frac{AC}{BC} = \frac{4{,}944}{3{,}056} = \emptyset$$





În planul UVW se construiește cercul și pentagonul regulat înscris UVSWT. Se repetă construcția de 12 ori și apare solidul minune dodecaedrul. Are 12 fețe, 20 de vârfuri și 30 muchii deci:

V+F=M+2 12+20=30+2 (ecuația lui Euler)

Vârfurile solidului sunt

12 pe dreptunghiurile lungi cu latura mica (UV_WZ...) egala cu latura pentagonului=3.056.

8 -vârfurile cubului mic-roșu, cu latura egala cu apotema pentagonului (ST=4.944))

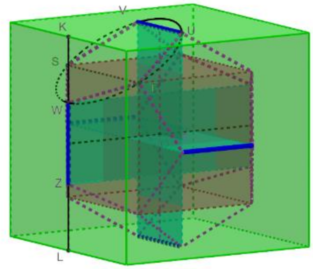
Depărtarea vârfurilor față de centrul O este:

maximă=KL/2=4 (1/2 din latura cubului verde),

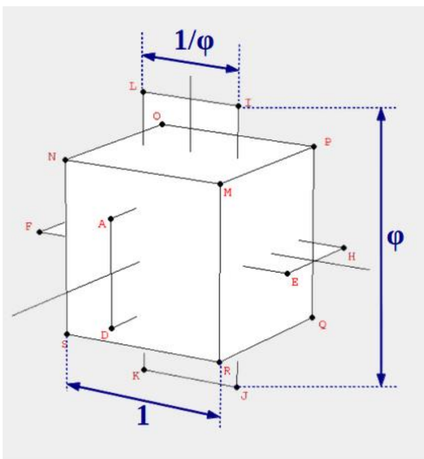
medie=ST/2=4.944/2=2.472 (1/2 din latura cubului roșu)

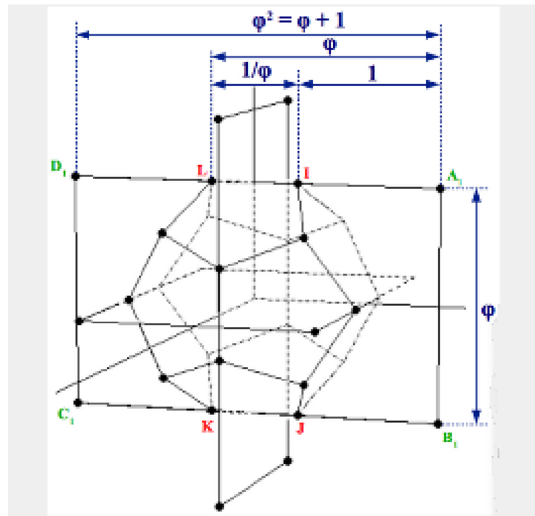
și mică=WZ/2=3.056/2=1.528 (1/2 din latura pentagonului)

mărimile 4-2.472 și 1.528 sunt în raport armonic $\emptyset - 1 - \frac{1}{\emptyset}$



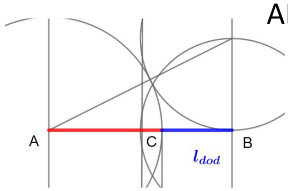
$$\frac{4}{2.472} = \frac{2,472}{1.528} = \emptyset = 1,618$$





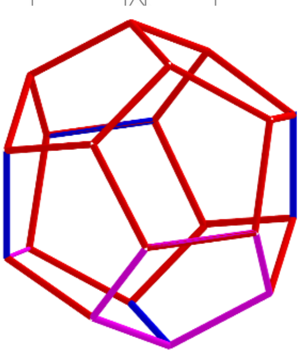
Se verifică din geometria 3D ecuația celebră $\emptyset^2 = \emptyset + 1$ sau $\emptyset = 1 + \frac{1}{\emptyset}$ sau

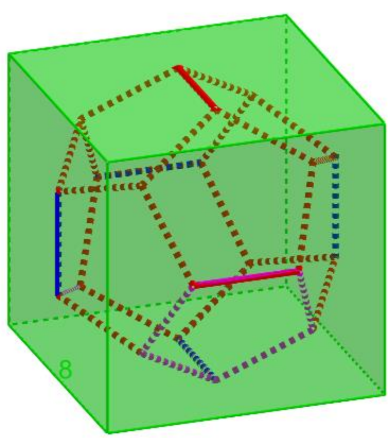
8x(1.618)=8x(1+0.618) sau 8=4.944+3.056, deci exact mărimile din 3D

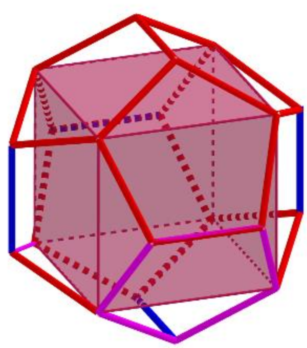


AB=8 AC=4.944 BC=3.056=latura pentagonului=$l_{dodecaedron}$

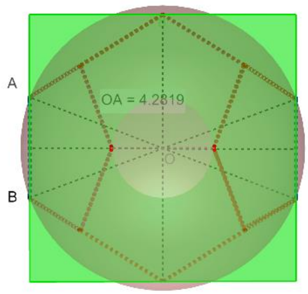
AC=ST=4.944=latura cub roșu=$l_{icosaedron}$

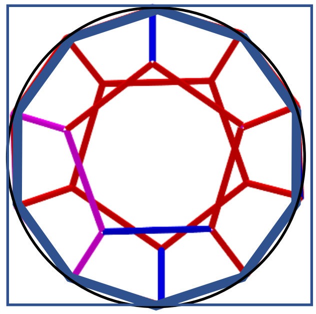


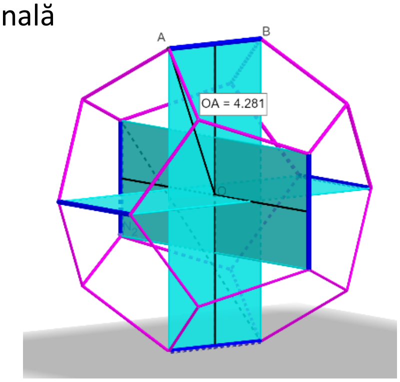




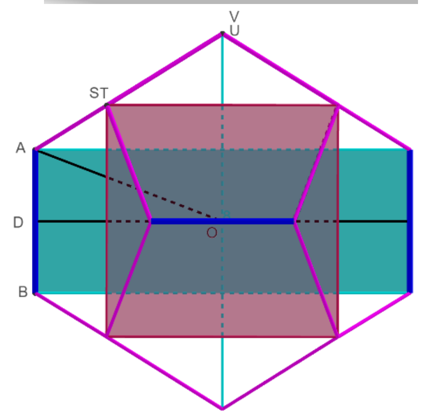
sfera circumscrisă și decagonul regulat în proiecție ortogonală







Raza sferei circumscrise este Pitagora în triunghiul AOD



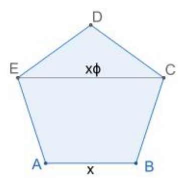
$$OA^2 = OD^2 + AD^2$$

$$R^2 = (\frac{l_{cub}}{2})^2 + (\frac{l_{dod}}{2})^2 = (\frac{8}{2})^2 + (\frac{3.056}{2})^2 = 18.334$$

R=4.2819 AB=x

$$4R^2 = (x(1+\emptyset))^2 + x^2 = x^2(1+(1+\emptyset)^2)$$

$4R^2 = x^2(3\emptyset^2)$ R=x$\emptyset\frac{\sqrt{3}}{2}$

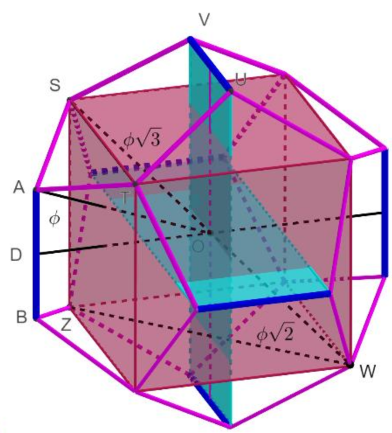


În triunghiul SZW

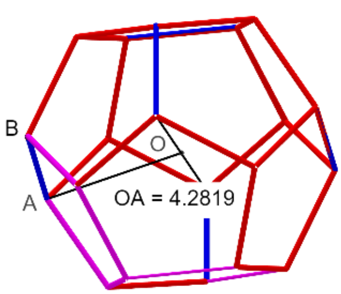
SZ= Ø AB-apotema în pentagon

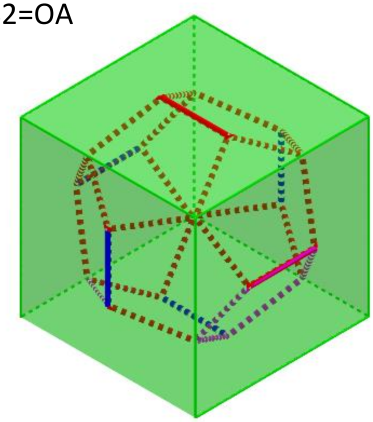
SW= $\emptyset\sqrt{2}$ AB-diagonala în pătratul feței cubului

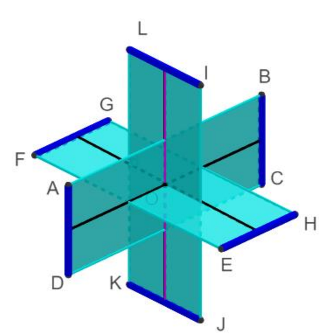
SW=diagonala cubului=diametrul sferei= $\emptyset\sqrt{3}$ AB



R= $\emptyset\frac{\sqrt{3}}{2}$ AB=1.618$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3.056)=4.282=OA



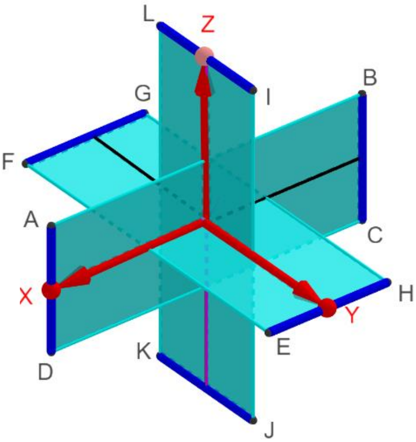




Coordonatele vârfurilor

12-sunt vârfurile celor 3 plane ce definesc sistemul de coordonate

(ADCB-EFGH-IJKL) $A(\frac{\phi}{2}, 0, \frac{1}{2\phi})$ $D(\frac{\phi}{2}, 0, -\frac{1}{2\phi})$



8-sunt vârfurile cubului mic-roșu $\emptyset^2$

$M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$-primul cadran

$T(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

MN=1=4,944

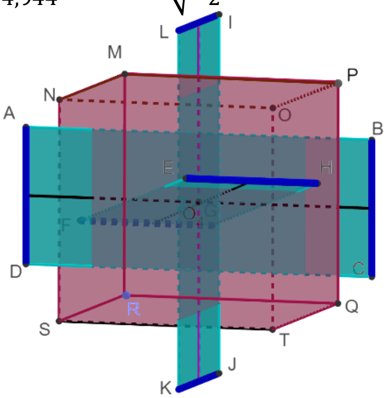
AD=$\frac{1}{\phi} = 3{,}056$

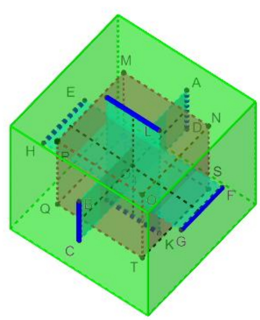
AB=8= ϕ

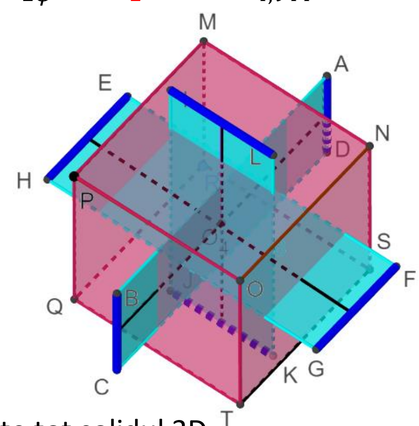
O(0,0,0)

$A(\frac{\emptyset}{2}, 0, \frac{1}{2\emptyset})$	$I(0, \frac{1}{2\emptyset}, \frac{\emptyset}{2})$	$Q(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
$B(-\frac{\emptyset}{2}, 0, \frac{1}{2\emptyset})$	$J(0, \frac{1}{2\emptyset}, -\frac{\emptyset}{2})$	$R(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
$C(-\frac{\emptyset}{2}, 0, -\frac{1}{2\emptyset})$	$K(0, -\frac{1}{2\emptyset}, -\frac{\emptyset}{2})$	$S(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
$D(\frac{\emptyset}{2}, 0, -\frac{1}{2\emptyset})$	$L(0, -\frac{1}{2\emptyset}, \frac{\emptyset}{2})$	$T(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
$E(\frac{1}{2\emptyset}, \frac{\emptyset}{2}, 0)$	$M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	
$F(\frac{1}{2\emptyset}, -\frac{\emptyset}{2}, 0)$	$N(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	
$G(-\frac{1}{2\emptyset}, -\frac{\emptyset}{2}, 0)$	$O(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	
$H(-\frac{1}{2\emptyset}, \frac{\emptyset}{2}, 0)$	$P(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	

$$\frac{R}{4{,}944}=\sqrt{OA^2}=\sqrt{(\frac{\phi}{2}-0)^2+(0-0)^2+(\frac{1}{2\phi}-0)^2}=\sqrt{(\frac{\phi}{2})^2+(\frac{1}{2\phi})^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}=0{,}866=\frac{4{,}282}{4{,}944}$$



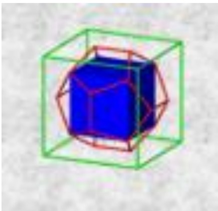


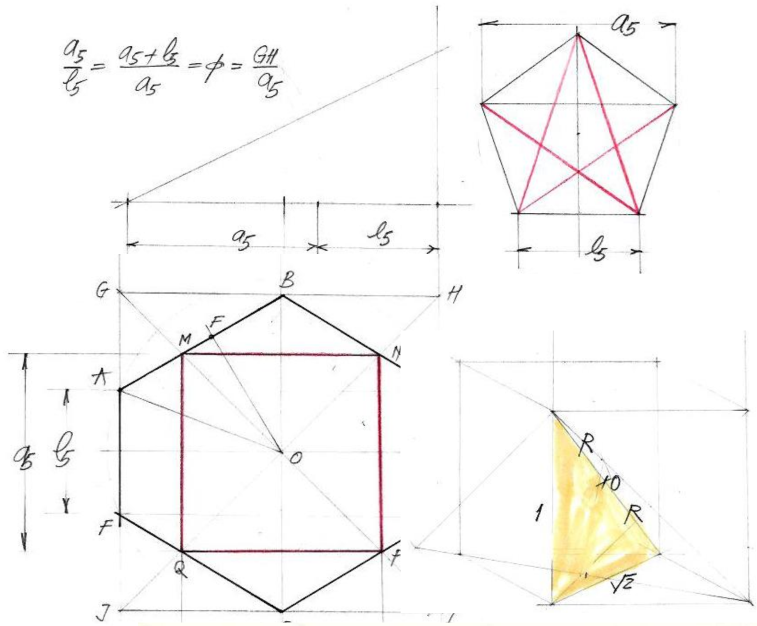


s-a menținut progresia geometrica cu rația $\emptyset$, care defineste tot solidul 3D

$\phi, 1, 1/\phi$ (latura cubului mare-verde=8, apotema pentagonului=4.944, latura dodecaedrului=3.056) (daca se divid la 4,944 se obține progresia $\varphi, 1, 1/\phi$)

În construcțiile geometrice următoare se vede din nou construcția primară-de aur cu .. a_5.ca diagonala în pentagon=latura cubului roșu-mic, l_5 –latura pentagonului=latura dodecaedrului și triunghiul dreptunghic-spațiu, din care s-a calculat OA -raza sferei circumscrise (diagonala cubului mic-roșu).





$\frac{a_5}{l_5} = \frac{a_5 + l_5}{a_5} = \phi = \frac{GH}{a_5}$
a_5
l_5
G
B
H
M
F
N
A
O
F
Q
J
R
R
1
$\sqrt{2}$

Fig.1

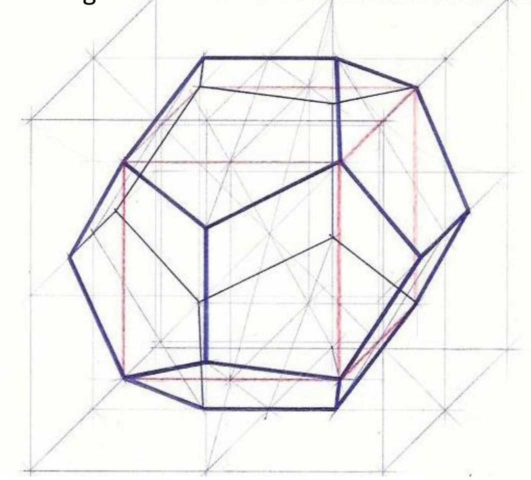
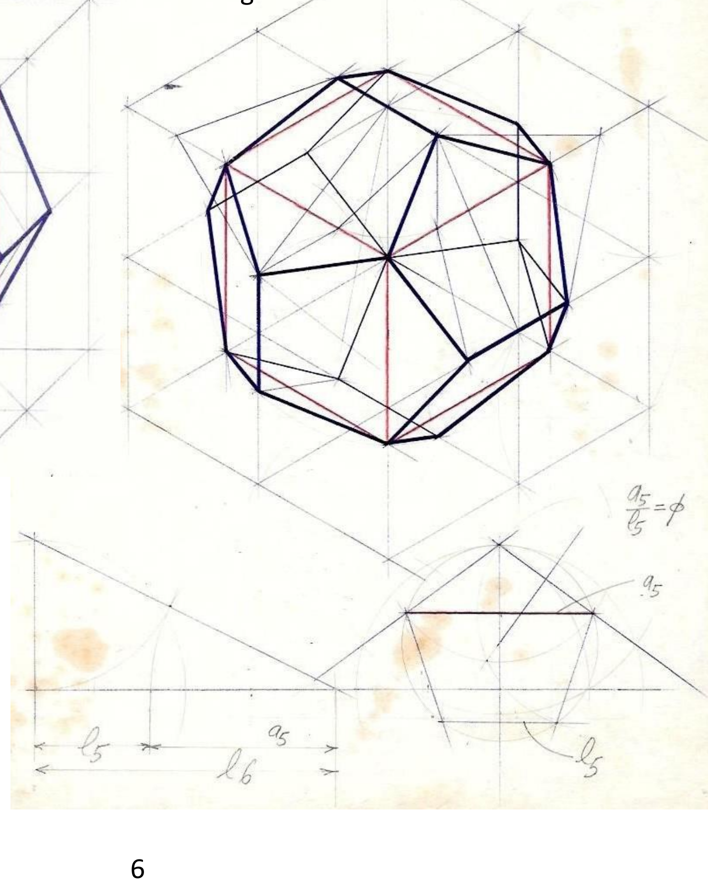


Fig.2



$\frac{a_5}{l_5} = \phi$
a_5
l_5
l_6

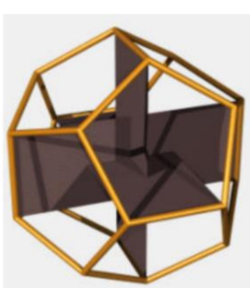


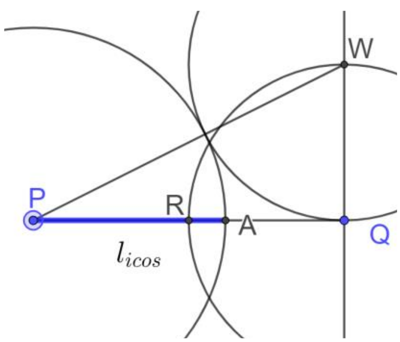
Fig. 1 și Fig.2 sunt desenate acum 50 de ani, când eram în clasa X, la 15 ani. Le-am desenat cu rigla și compasul, pe o planșetă de lemn, rabatabilă, pe care am găsit-o în atelierul de pictură al unchiului meu Alexandru Donici, mare maestru-cel mai bun pictor din Câmpulung, orașul meu natal. Precizia este uimitoare, comparabilă cu tehnica modernă-din zilele noastre.

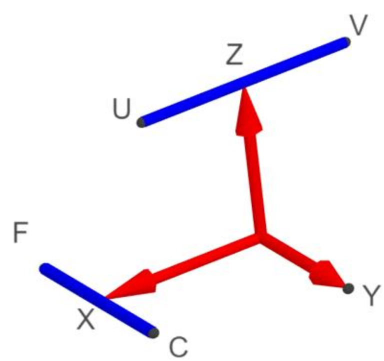
Icosaedrul

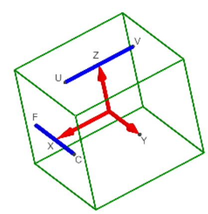
Icosaedrul, are 20 fețe, 12 vârfuri și 30 muchii deci: **V+F=M+2** 20+12=30+2 (ecuația lui Euler)

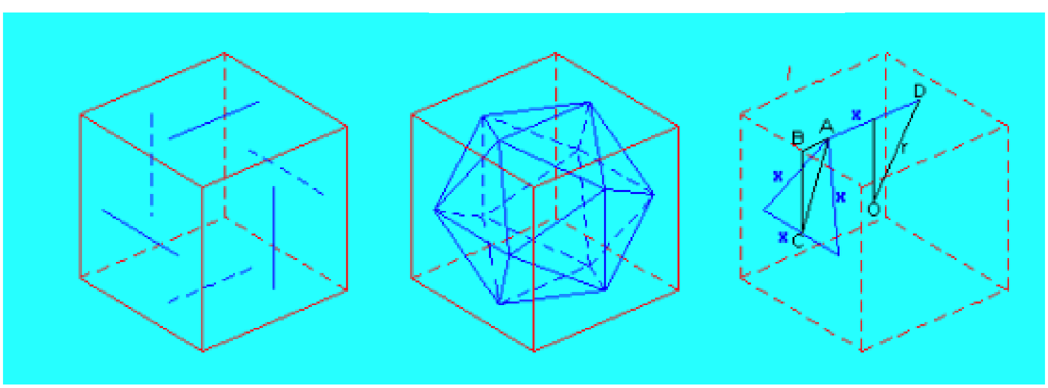
Construcția

Se pornește cu latura cubului mare PQ, care se împarte în raportul de aur. Se obține AP-latura icosaedrului (AQ-latura dodecaedrului)



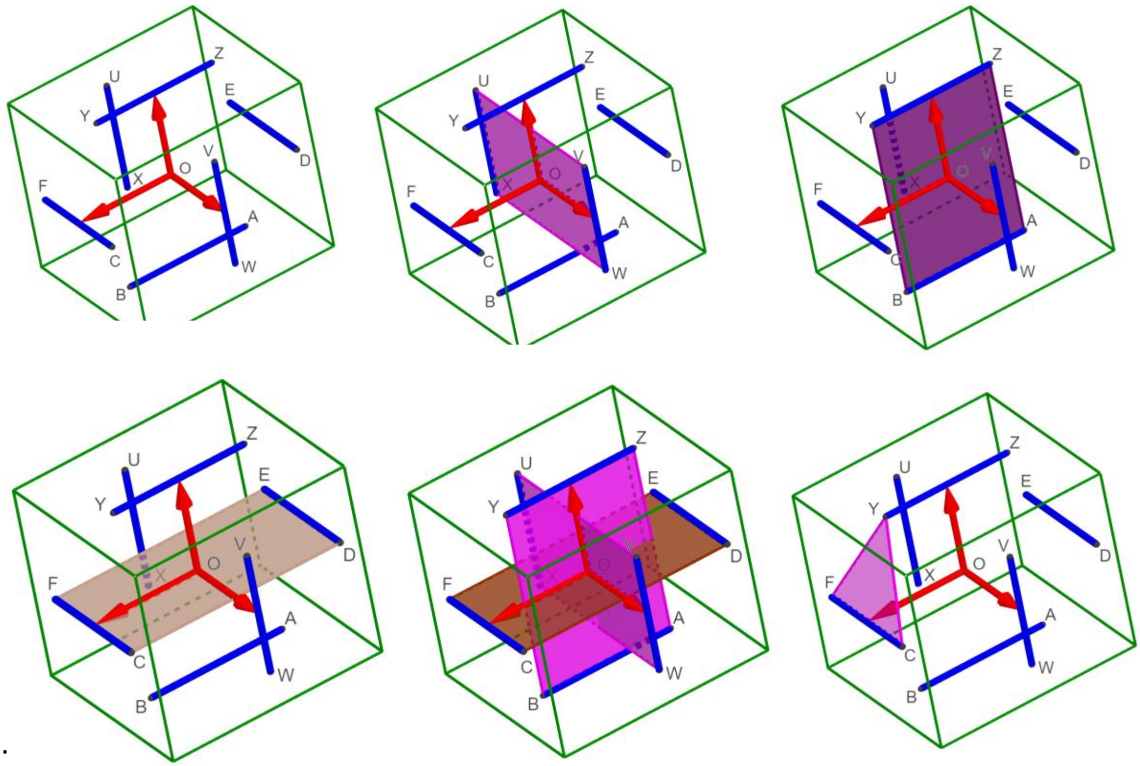






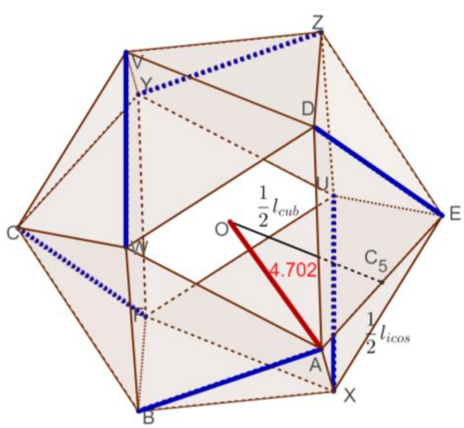
Pe sistemul 3D-X;Y;Z se construiește cubul mare-verde și se duc pe medianele fețelor segmentele FC=DE=VW=UX=AB=YZ=latura icosaedrului. Obținem cele 12 vârfuri și cele 3 plane-dreptunghiuri de aur-2 verticale și unul orizontal.

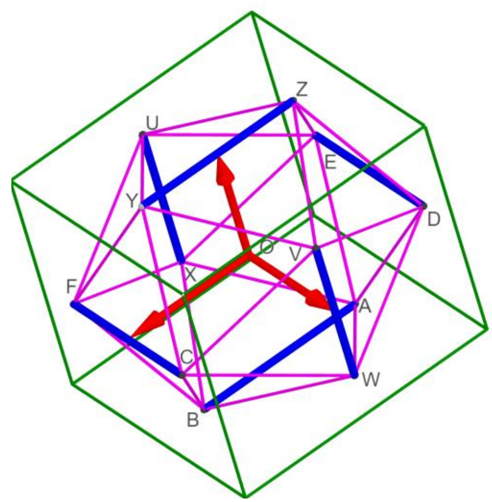
se construiesc planele de simetrie cu dreptunghiurile de aur-2 verticale și unul orizontal



.

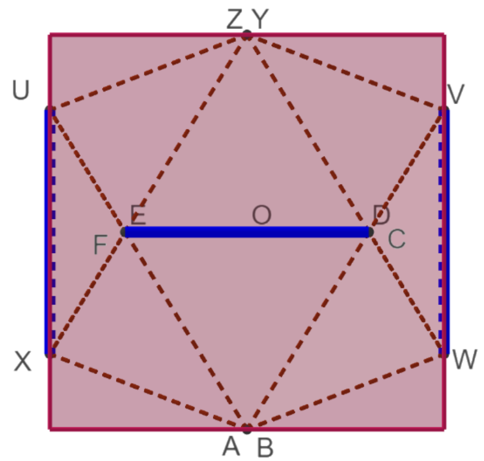
Apoi se unesc vârfurile și avem icosaedrul 3D.

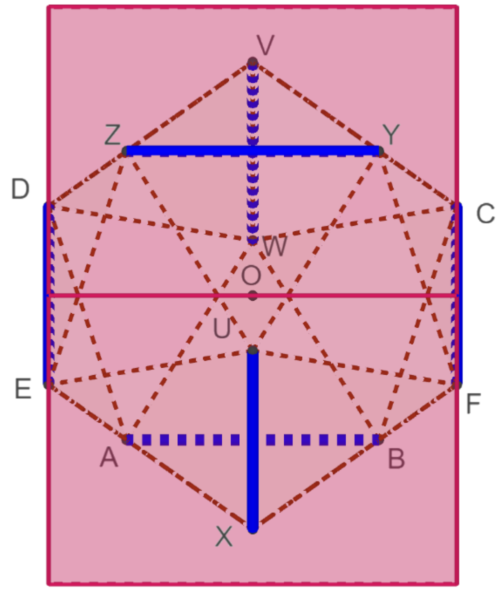




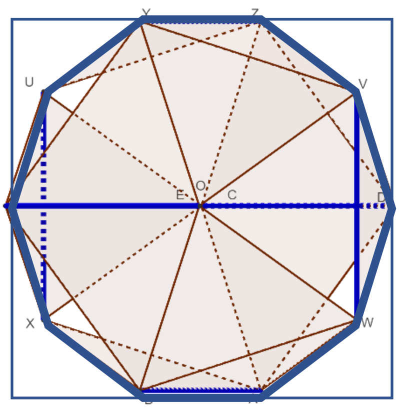
$R = l\ icos\ \ \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = 4.702$

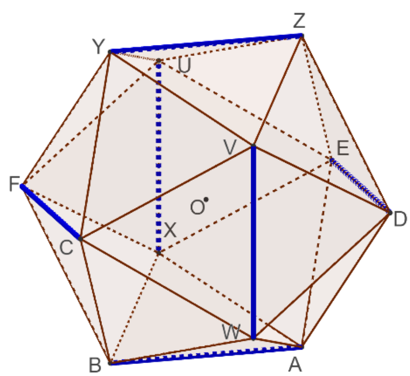
Raza sferei circumscrise în triunghiul OAC_5 $OA^2 = {OC_5}^2 + {AC_5}^2$
diferite vederi ale icosaedrului cu schimbarea direcției de vedere

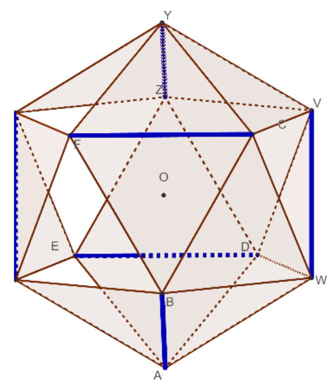




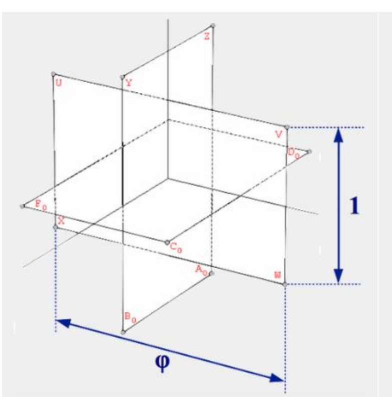
decagonul regulat în proiecție ortogonală







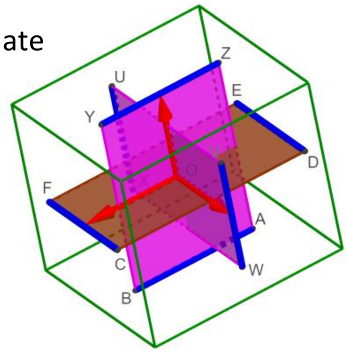
Coordonatele vârfurilor



$U(0,-\frac{\varnothing}{2},\frac{1}{2})$	$C(\frac{\varnothing}{2},\frac{1}{2},0)$
$V(0,\frac{\varnothing}{2},\frac{1}{2})$	$D(-\frac{\varnothing}{2},\frac{1}{2},0)$
$W(-\frac{\varnothing}{2},\frac{\varnothing}{2},-\frac{1}{2})$	$E(-\frac{\varnothing}{2},-\frac{1}{2},0)$
$X(0,-\frac{\varnothing}{2},-\frac{1}{2})$	$F(\frac{\varnothing}{2},-\frac{1}{2},0)$
$Y(\frac{1}{2},0,\frac{\varnothing}{2})$	
$Z(-\frac{1}{2},0,\frac{\varnothing}{2})$	
$A(-\frac{1}{2},0,-\frac{\varnothing}{2})$	
$B(\frac{1}{2},0,-\frac{\varnothing}{2})$	

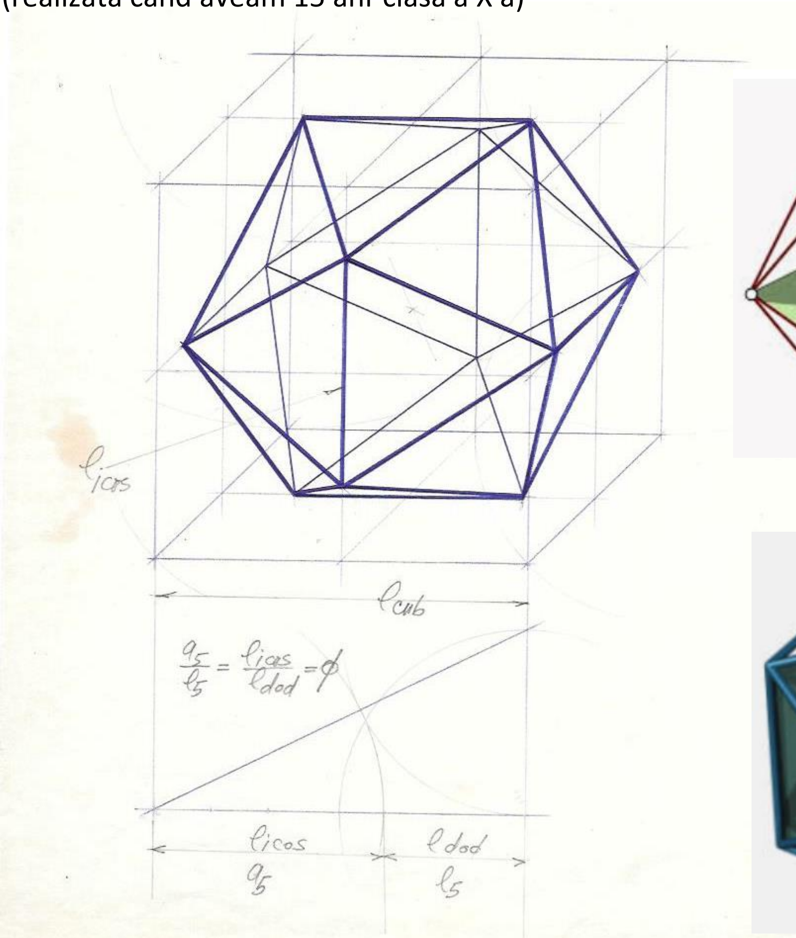
VW=4,944=1/UV=8= ϕ /O(0,0,0)

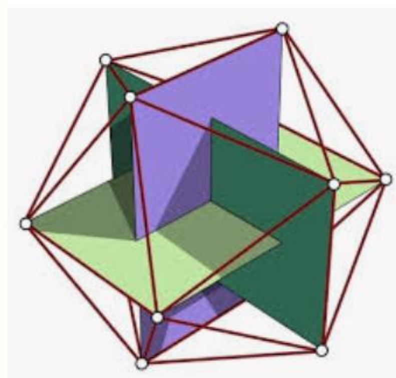
12-sunt vârfurile celor 3 plane ce definesc sistemul de coordonate
(ADYZ-EFCD-UVWX) A$(-\frac{1}{2},0,-\frac{\phi}{2})$ D$(-\frac{\phi}{2},\frac{1}{2},0)$
(direcția axelor și semnul-la fel ca la dodecaedru)
s-a menținut progresia geometrică cu rația Ø ,
care definește tot solidul 3D (1, ϕ)
FC=4.944 latura cubului=8
(dacă se divid la 4,944 se obține progresia (1, ϕ)

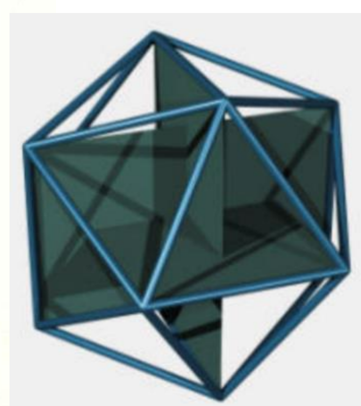


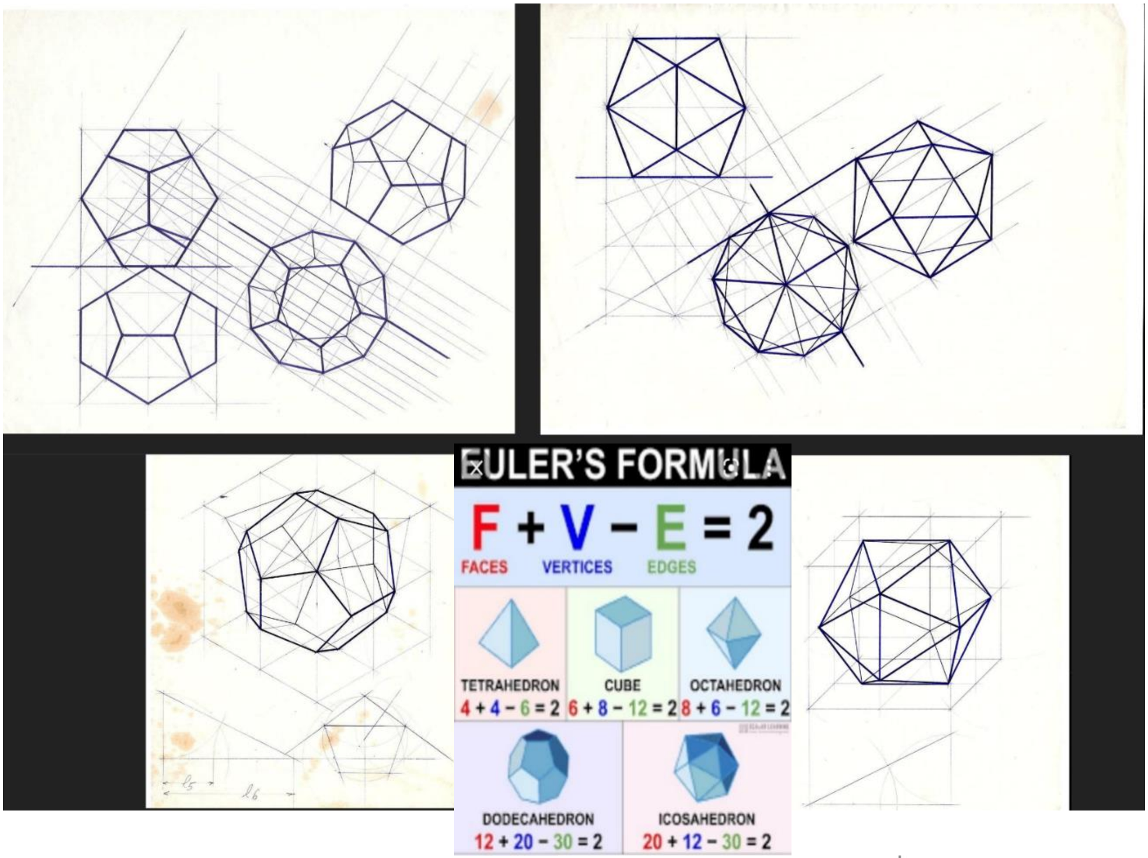
$$\frac{R}{4{,}944}=\sqrt{OA^2}=\sqrt{(-\frac{1}{2}-0)^2+(0-0)^2+(-\frac{\phi}{2}-0)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\phi^2+1}=0{,}951=\frac{4{,}702}{4{,}944}$$

(Același rezultat obținut și la dodecaedru)
mai jos este construcția icosaedrului, cu rigla și compasul
(realizata când aveam 15 ani-clasa a X a)

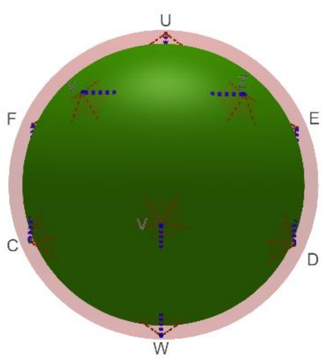


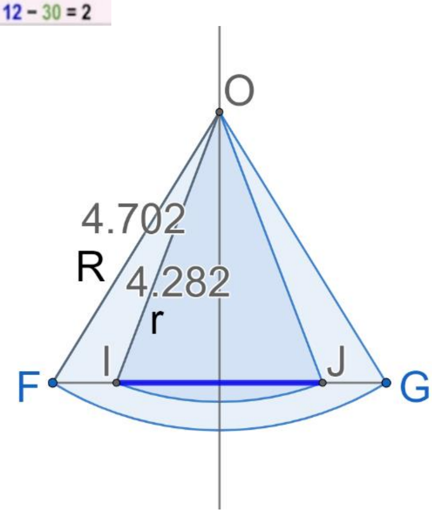






Despre sferele circumscrise





Din calcule și prin construcția 3D, se vede diferența dintre cele 2 sfere. Cea mare-exterioara-icosaedru (R=4,702) și cea mica-verde-dodecaedru (r=4,282).

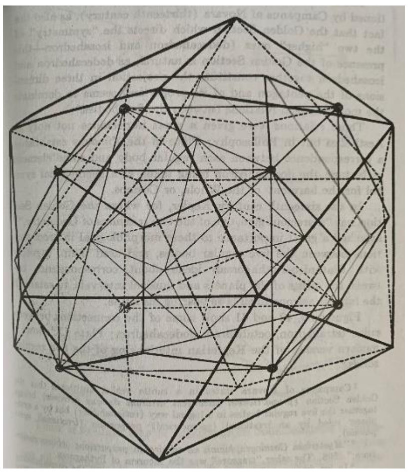
IJ-latura dodecaedrului=3,056 și FG=latura icosaedrului=4,944 (latura cubului=8)

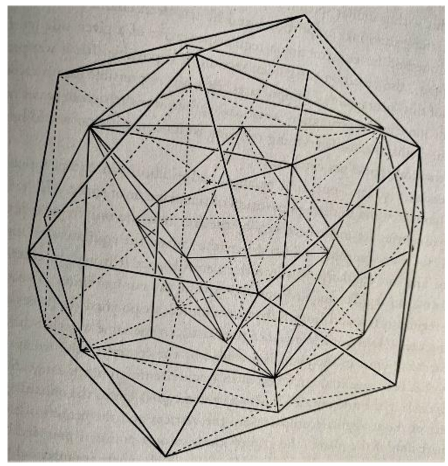
Deci, dacă construim din cubul mare inițial cele 2 solide, acestea 2 nu se înscriu în aceeași sfera. Cele 2 sfere circumscrise sunt arătate diferite, prin construcție și calcul

$$(1)\ r = \emptyset \frac{\sqrt{3}}{2}\, l_{dod} = R = l_{icos} \quad \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \qquad \frac{l_{icos}}{l_{dod}} = \frac{\emptyset\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}} = \frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{3}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = 1.473$$

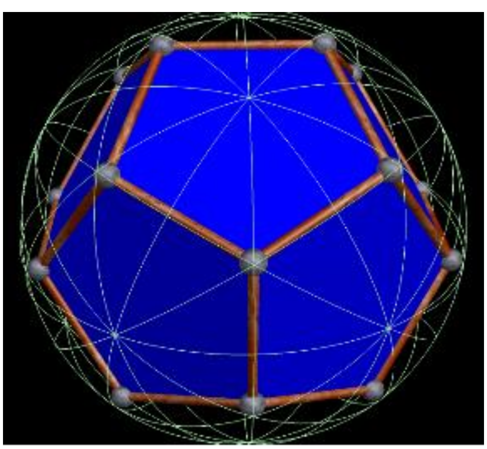
Dacă egalăm razele, raportul dintre cele 2 laturi-icosaedru și dodecaedru nu mai este 1,618= $\emptyset$. Deci se poate construi o sfera care sa cuprinda cele 2 solide, dar raportul lor este diferit de construcția de fața-obținută prin cubul mare cu latura 8.

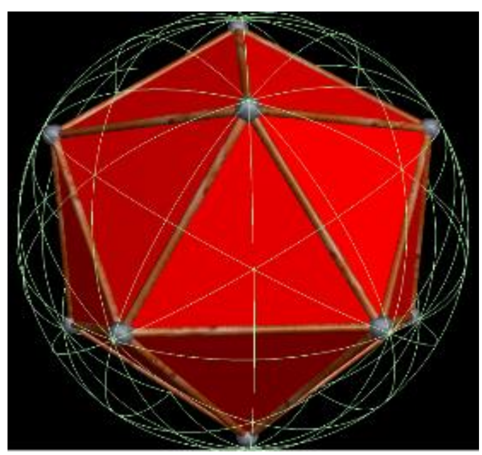
Cele 5 solide construite de **Matila Ghyka** (1881-1965) în cartea *The Golden Number*-1931



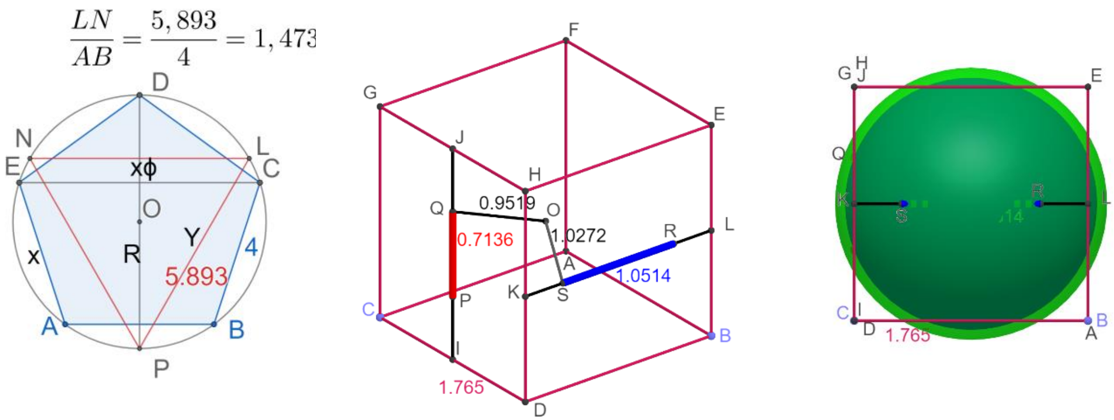


Cele două solide-dodecaedrul și icosaedrul, care sunt **duale**, înfrățite; dintr-unul se construiește altul, căci laturile lor sunt în raport de aur între ele și apoi cu latura mare a cubului l_6. Dacă se cunoaște una dintre ele se construiesc celelalte două, căci la raportul de aur avem **3 mărimi**: *mare*, *mijloc* și *mic*-cel mare cu cel mijlociu și cel mijlociu cu cel mic sunt în același raport de aur=1.618= $\emptyset$ (l_6, a_5 și l_5).

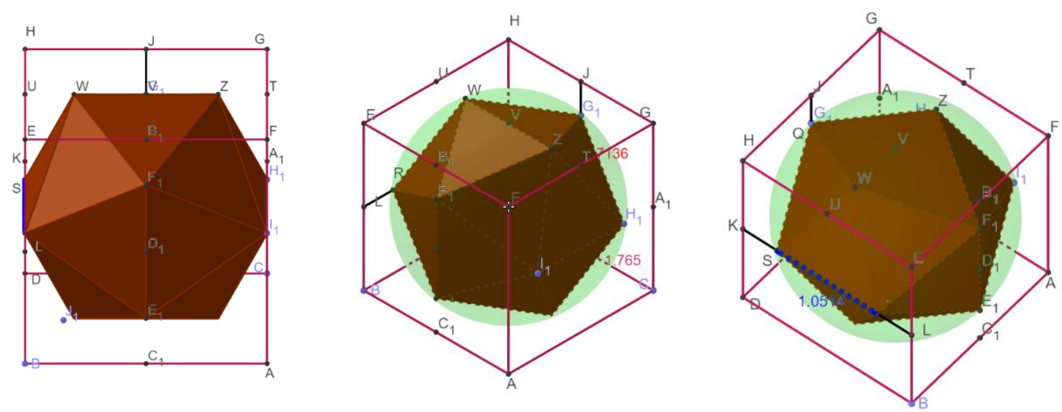




În plan se vad triunghiul și pentagonul regulat înscrise în cerc, cu raportul laturilor 1,473



Am pornit construcția 3D cu laturile OP (dodecaedru)=0,7136 și RS (icosaedru)=1,0514 care sunt în același raport (1,473) ca și (*surorile*) similare din 2D (latura pentagonului AB=4 și latura triunghiului echilateral LN=5,893). Suma lor este OP+RS=1,765 egala cu latura cubului (nu mai sunt în raport de aur ca în construcția precedentă). Se obțin 2 sfere diferite cu razele r=0,9519-pentru dodecaedru și R=1,0272-pentru icosaedru (cele 2 cercuri verzi mic și mare). Ar trebui sa obțin aceeași sfera cu raza 1 (raportul 1,473=l-icos/l-dod este din ecuația (1)de egalitate a razelor R și r)

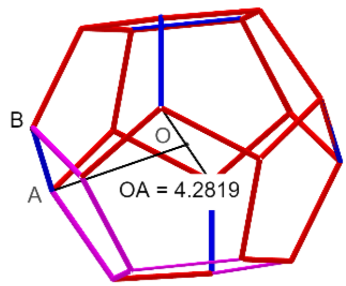


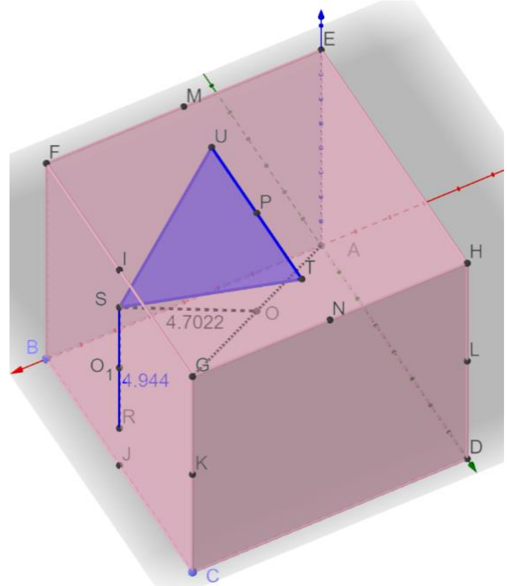
Faptul ca sunt 2 sfere diferite circumscrise, arata ca nu se poate construi aceeași sfera pornind de la construcția unui singur cub (cu latura de 8, în geometria de la început). Încercarea construcției, pe același cub, cu latura de 1,765-mai sus, arată la fel, imposibilitatea construcției în aceeași sfera-razele sunt diferite.

Cum să le înscriem în aceeași sferă?

pornim de la cubul ABCDEFGH cu latura 8 și luam pe liniile mediane SR=UV=4,944= $l\ icos$

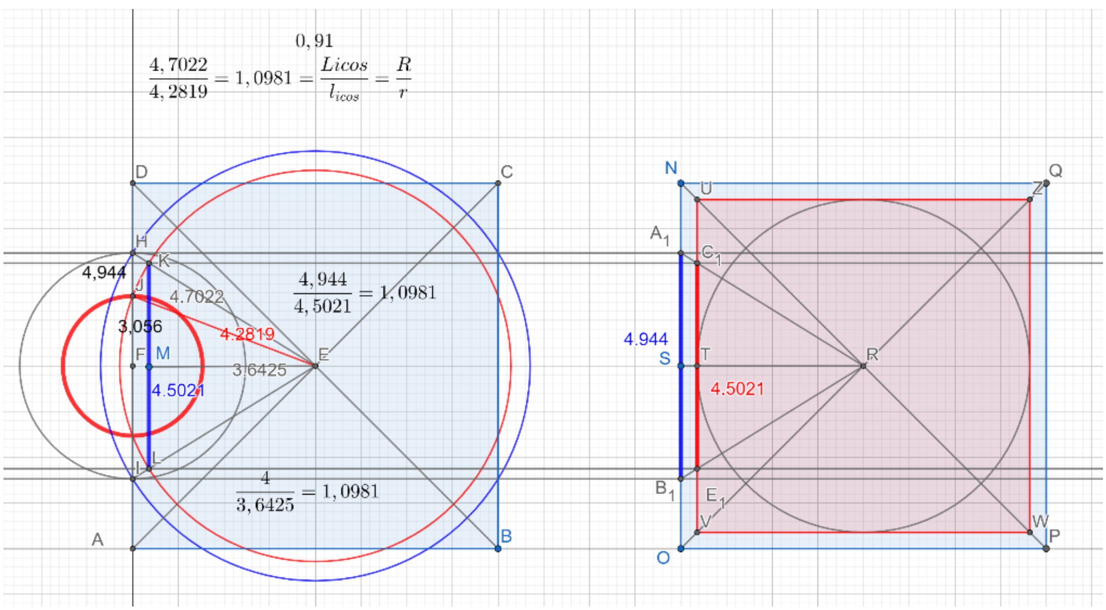
$$\frac{l\ cub}{l\ icos} = \frac{BC}{RS} = \frac{8}{4{,}944} = 1.618 = \emptyset$$





Obținem raza sferei circumscrise OS=4,7022

În cazul pentagonului, cu latura AB=3,056 se obține raza OA=4,2819 (mai sus stânga)



Mai sus avem o secțiune pe un plan median al cubului unde apar cele 2 laturi dodecaedru-cu roșu-diametrul cercului roșu și raza rezultata 4,2819=EJ. Apoi icosaedrul-cu albastru cu latura inițială HI=4,944=A1B1, care obține raza sferei circumscrise EH=4,7022=RA1.

Soluția este sa reducem construcția inițială (cub ABCD-latura 8/ icosaedru cu latura HI=A1B1=4,944/sfera circumscrisa R=4,7022=RH=RA1) la alta construcție redusa, un cub redus, concentric cu cel mare-roșu UVWZ cu latura 7,285/un icosaedru cu latura redusa KL=C1E1=4,5021/o sfera concentrica cu raza redusa 4,2819.

reducere de la R=4,7022 la r=4,2819 $\frac{R}{r} = \frac{EH}{EJ} = \frac{4,7022}{4,2819} = 1,0981$

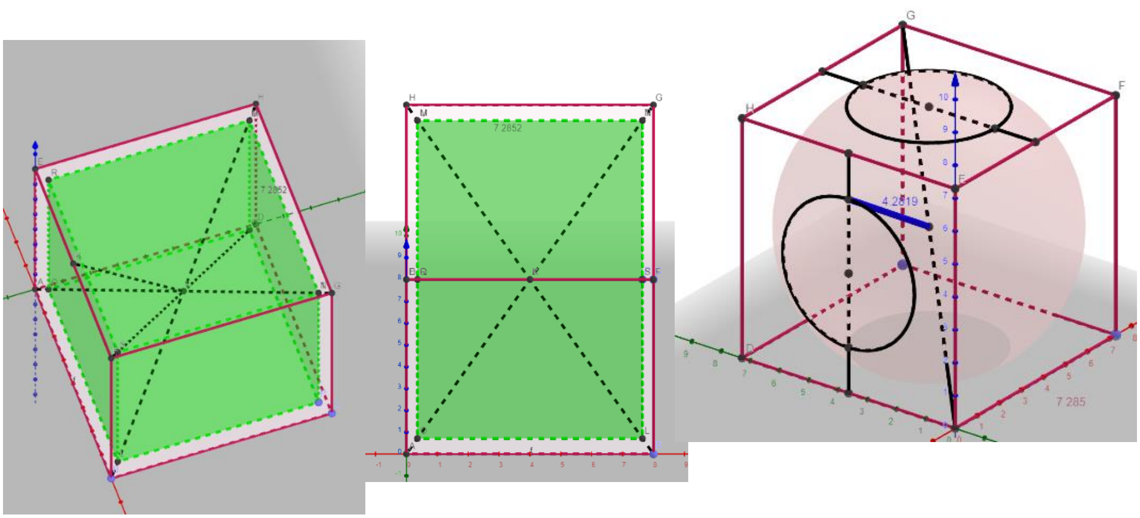
reducere de la Lcub=8 la lcub=7,285 $\frac{Lcub}{l\ cub} = \frac{AD}{UV} = \frac{8}{7,285} = 1,0981$

reducere de la L icos=4,944 la l icos=4,5021 $\frac{L\ icos}{l\ icos} = \frac{HI}{KL} = \frac{A1B1}{C1E1} = \frac{4,944}{4,5021} = 1,0981$

reducerea 1,0981 (9,8%) va aduce vârfurile icosaedrului mare-pe cubul cu latura 8, pe sfera mai mica, cu raza de 4,2819, care cuprinde dodecaedrul inițial cu latura de 3,056.

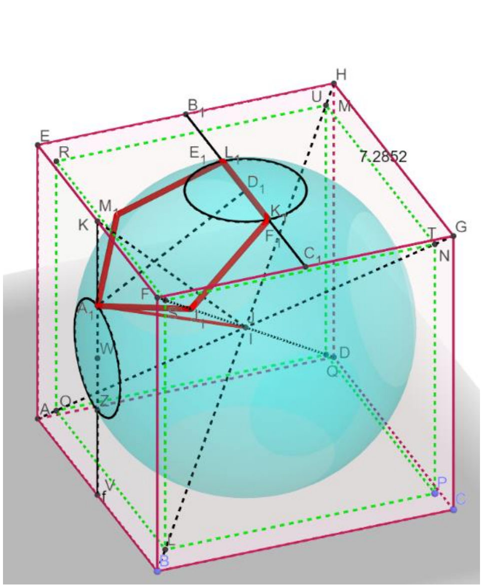
Începem construcția cubului redus-verde concentric cu cel mare-roșu

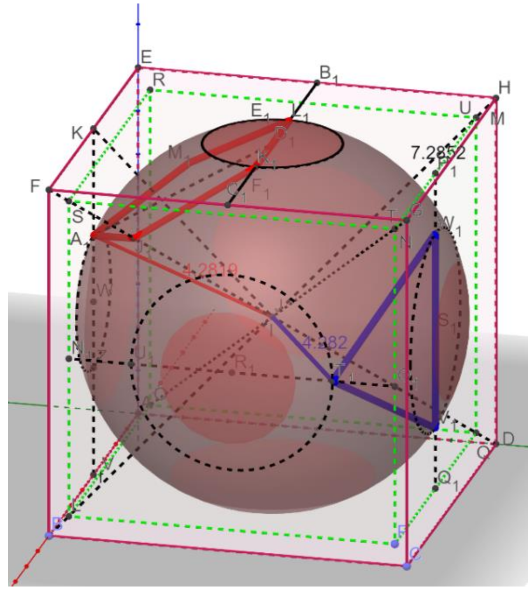
Obținem raza redusa a sferei 4,2819



pentagonul-roșu în dodecaedrul -cubul inițial-roșu cu latura 8 și triunghiul echilateral-albastru în icosaedrul cu latura redusa în cubul redus-verde, cu latura 7,285 concentric.

(figurile următoare)

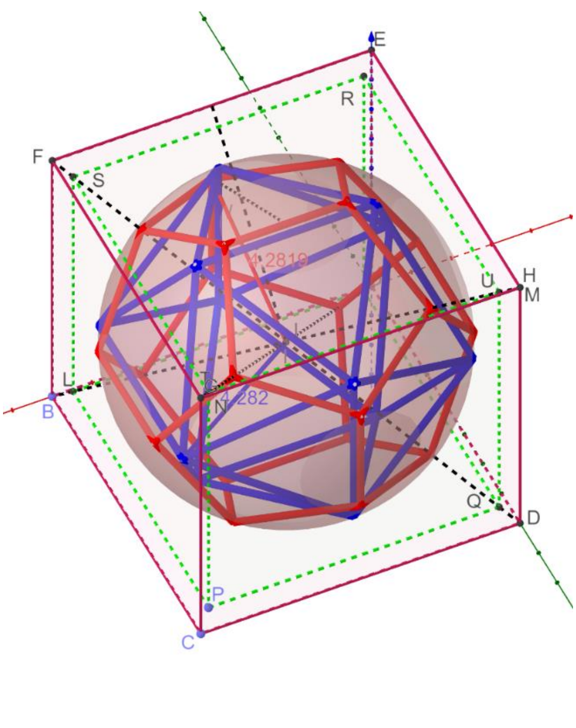


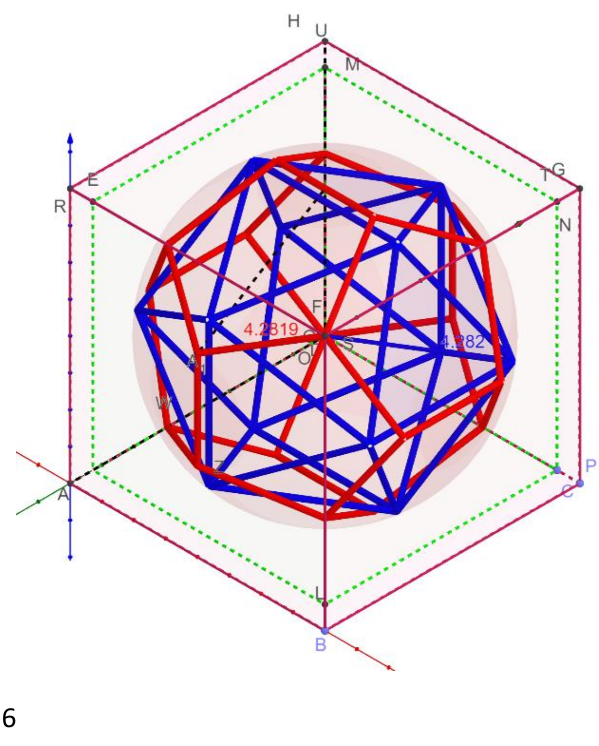


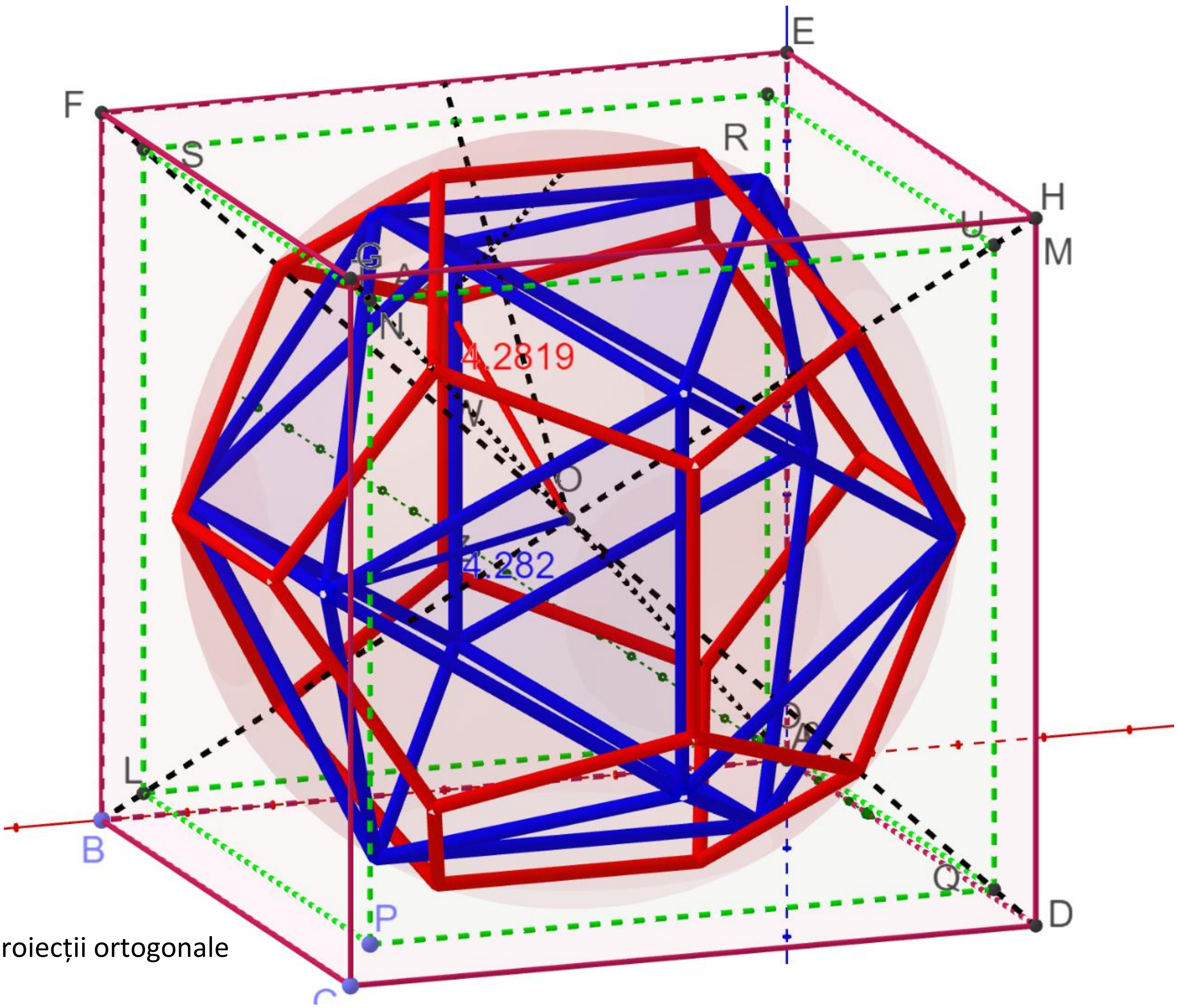
Construcția finală cu cele doua solide duale înscrise în aceeași sferă, cu raza 4,2819

se vad cubul mare-roșu cu latura 8 care cuprinde dodecaedrul cu latura 3,056

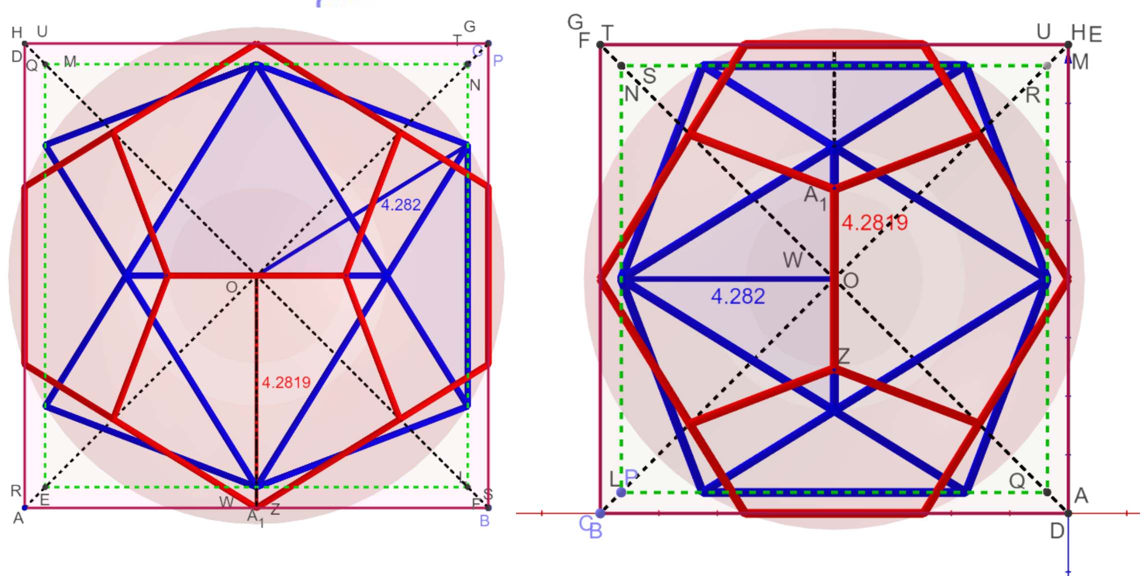
cubul mic-verde, concentric, redus cu latura redusa 4,5021



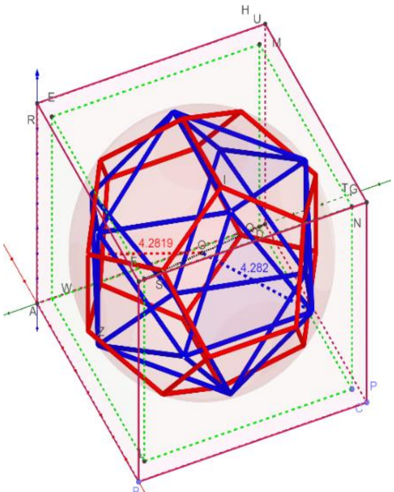


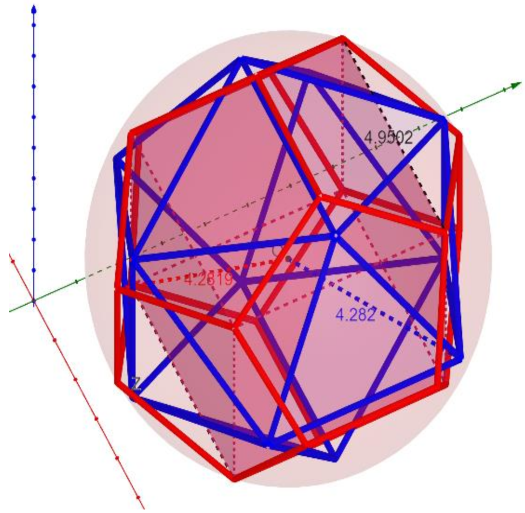


proiecții ortogonale

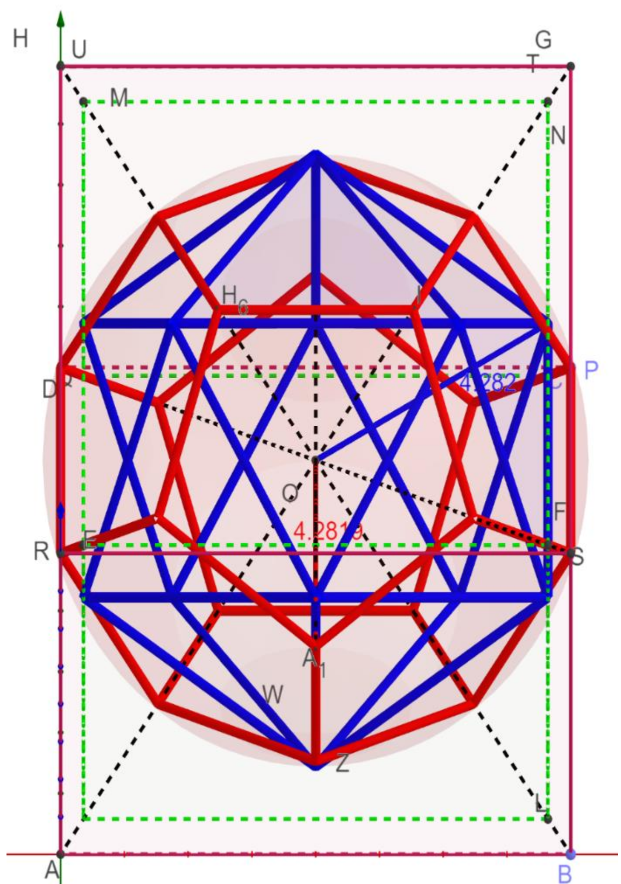


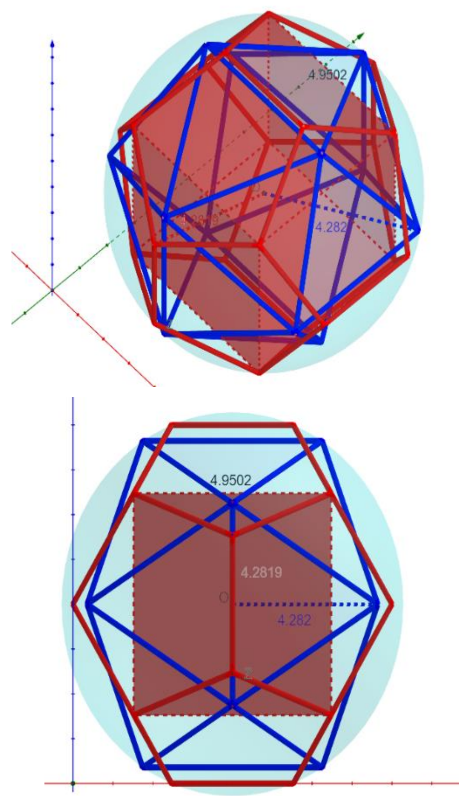
cubul înscris în sferă-roșu, are laturile egale cu apotema-diagonala pentagonului=4,9502 (o mica eroare față de 4,944). Raza sferei 4,282 (4,2819) apare mereu





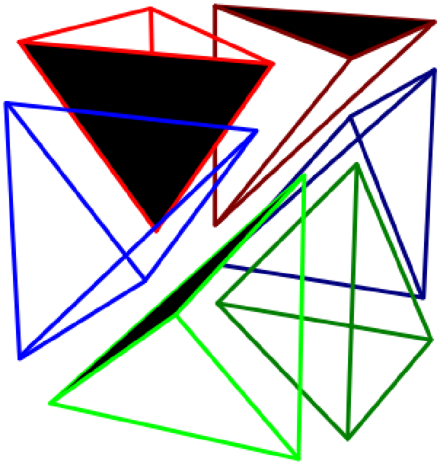
Proiecții ortogonale și spațiale





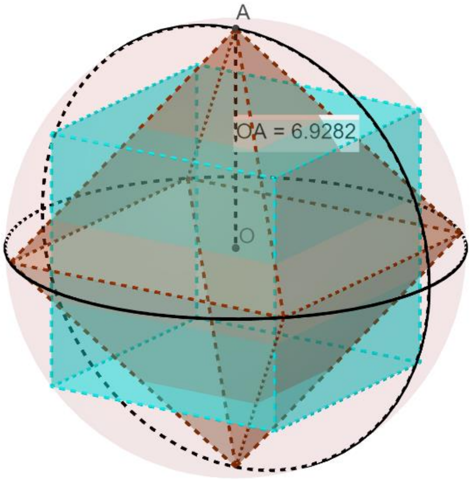
Cubul, tetraedrul și octaedrul regulat, înscrise în sferă

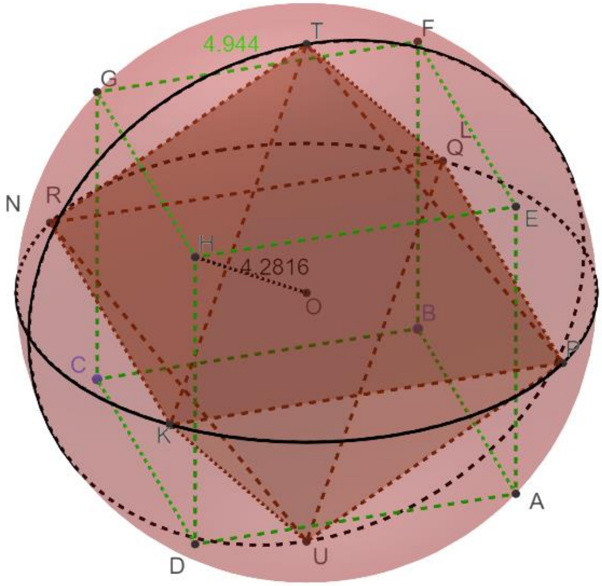
2 tetraedre regulate intersectate înscrise în același cub și împărțirea cubului în 6 piramide egale ca volum



un cub și octaedrul înscris în sfera cu raza 6,9282

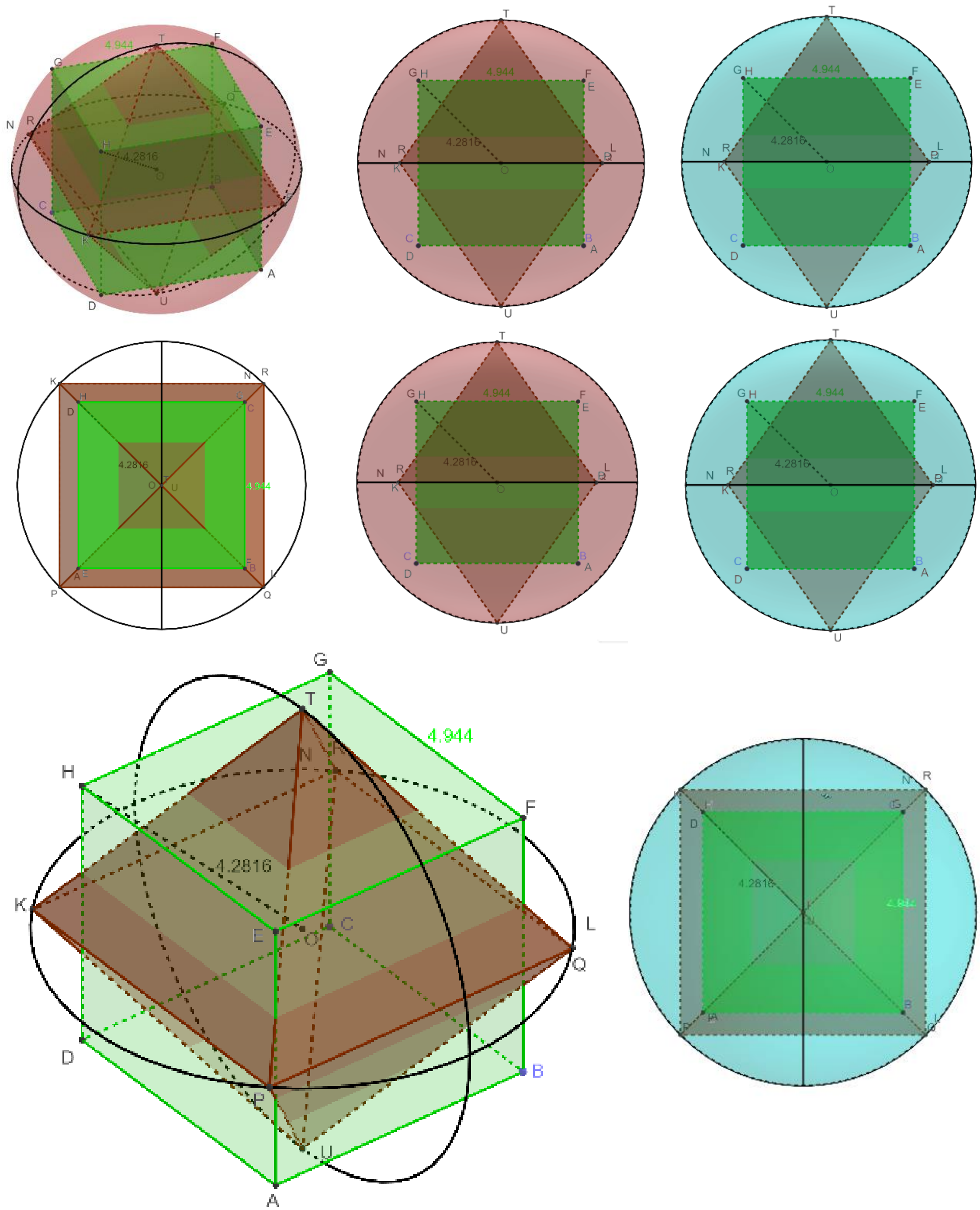
(dreapta)- începem construcția în sfera cu raza R=OH=4,2819 (4,2816), folosită anterior pentru dodecaedru și icosaedru

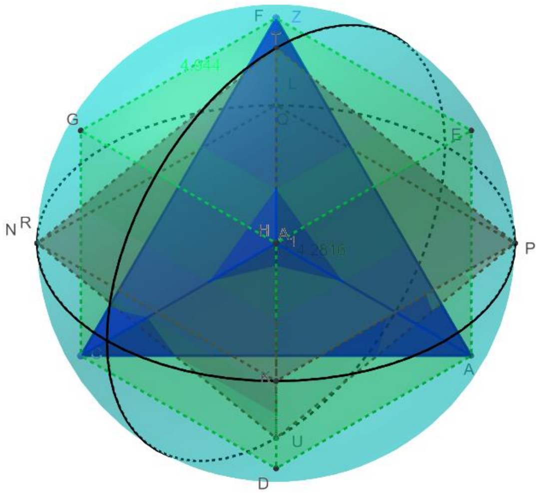


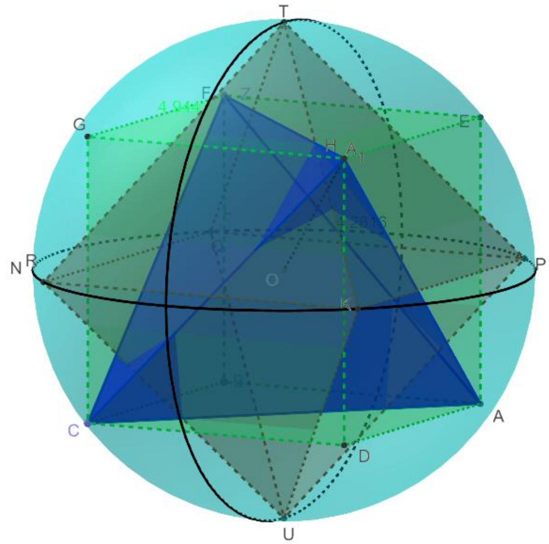


Cubul și octaedrul sunt duale și din cub rezulta octaedrul, daca se unesc centrele fețelor (cubul are 6 fețe și vor rezulta 6 vârfuri ale octaedrului) ca și la dodecaedru și icosaedru.

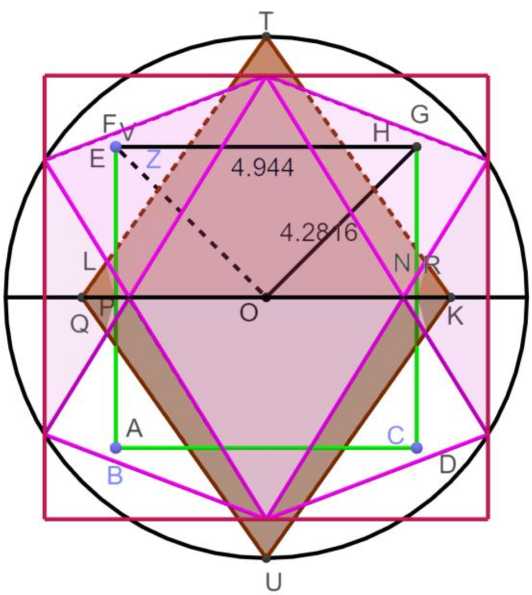
Cubul verde, de pornire are latura 4,944 egală cu apotema pentagonului din construcțiile anterioare $\frac{4,944}{3,056} = 1.618 = \emptyset$

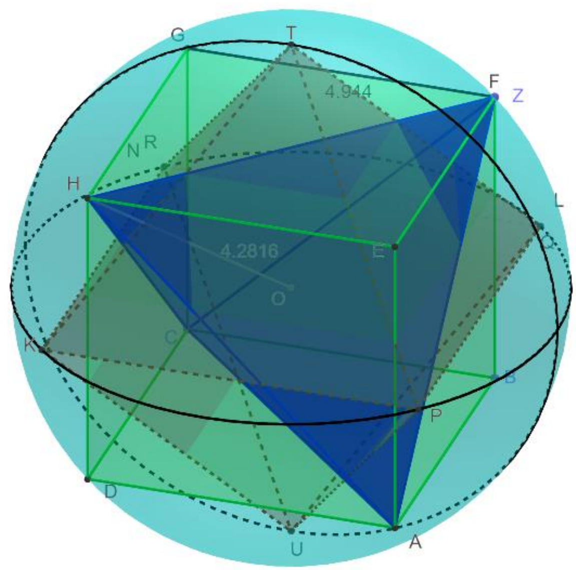






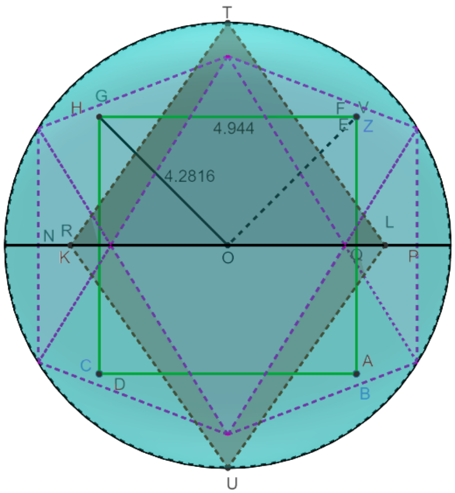
Tetraedrul cu vârfurile în colțurile cubului și cu laturi diagonala fețelor.

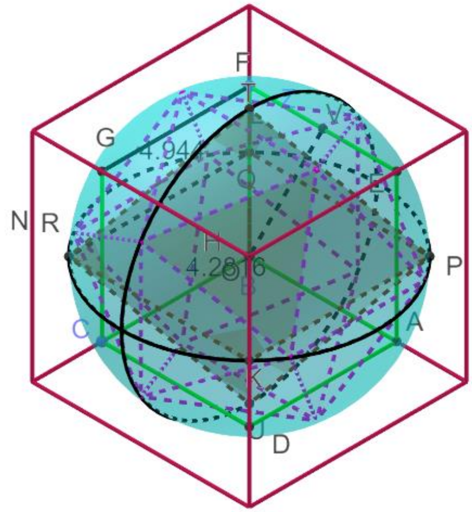




Construim în aceeași sferă (R=4,2819) icosaedrul -același din construcțiile anterioare-cu latura 4,5021-inscris în cubul redus cu latura 7,285 (de la 8) $\frac{7,285}{4,5021} = 1.618 = \emptyset$

Pentru construcție, respectam regula de aur, latura cubului/latura icosaedrului=1,618 proiecție ortogonala și 3D





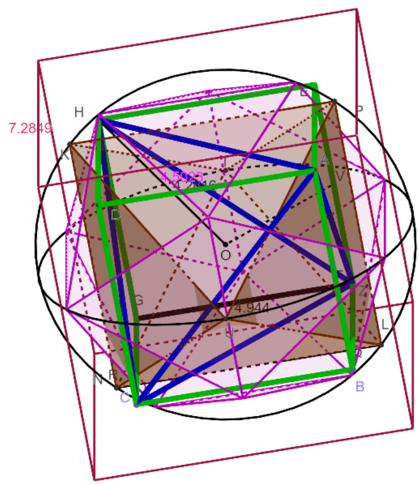
tetraedrul înscris violet

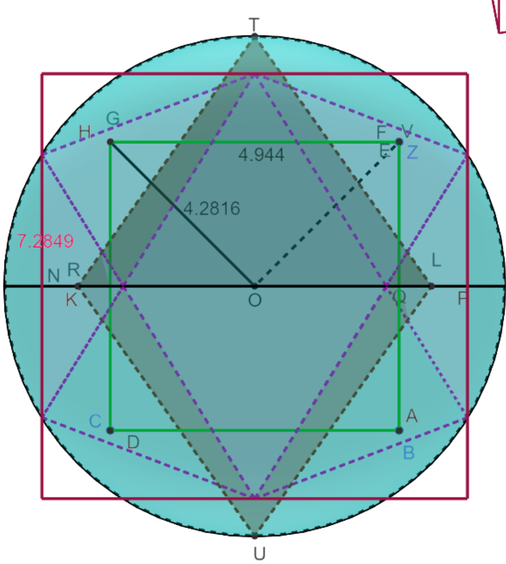
octaedrul înscris maron

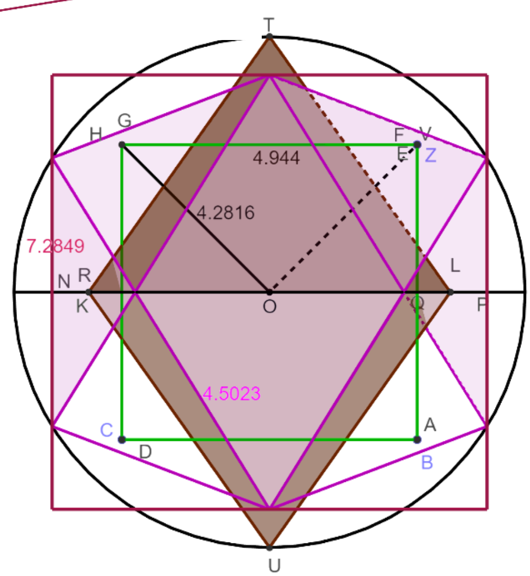
cubul mare (l=7,285)

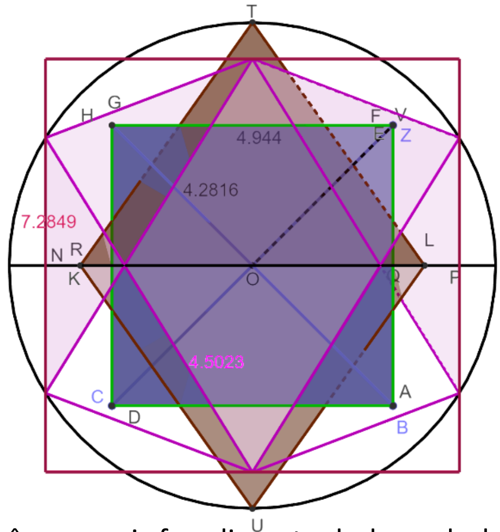
cubul înscris-mic (l=4,944)

icosaedrul înscris (l=4,5021)



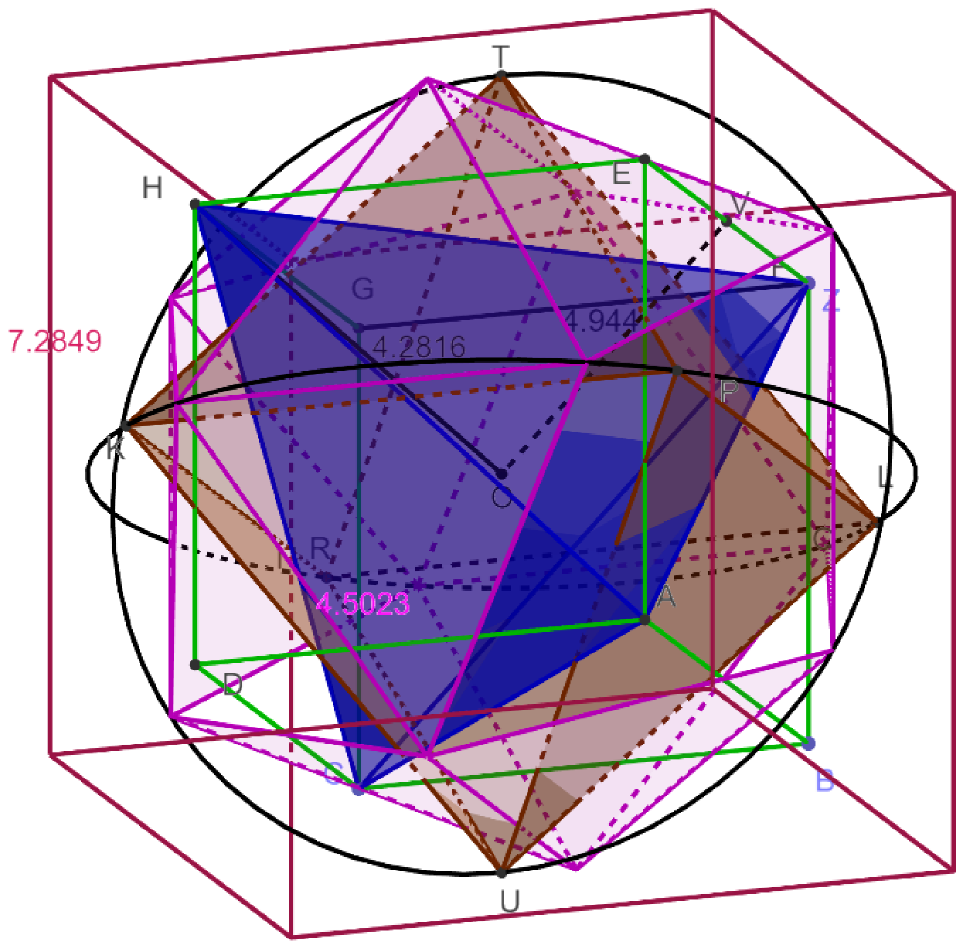




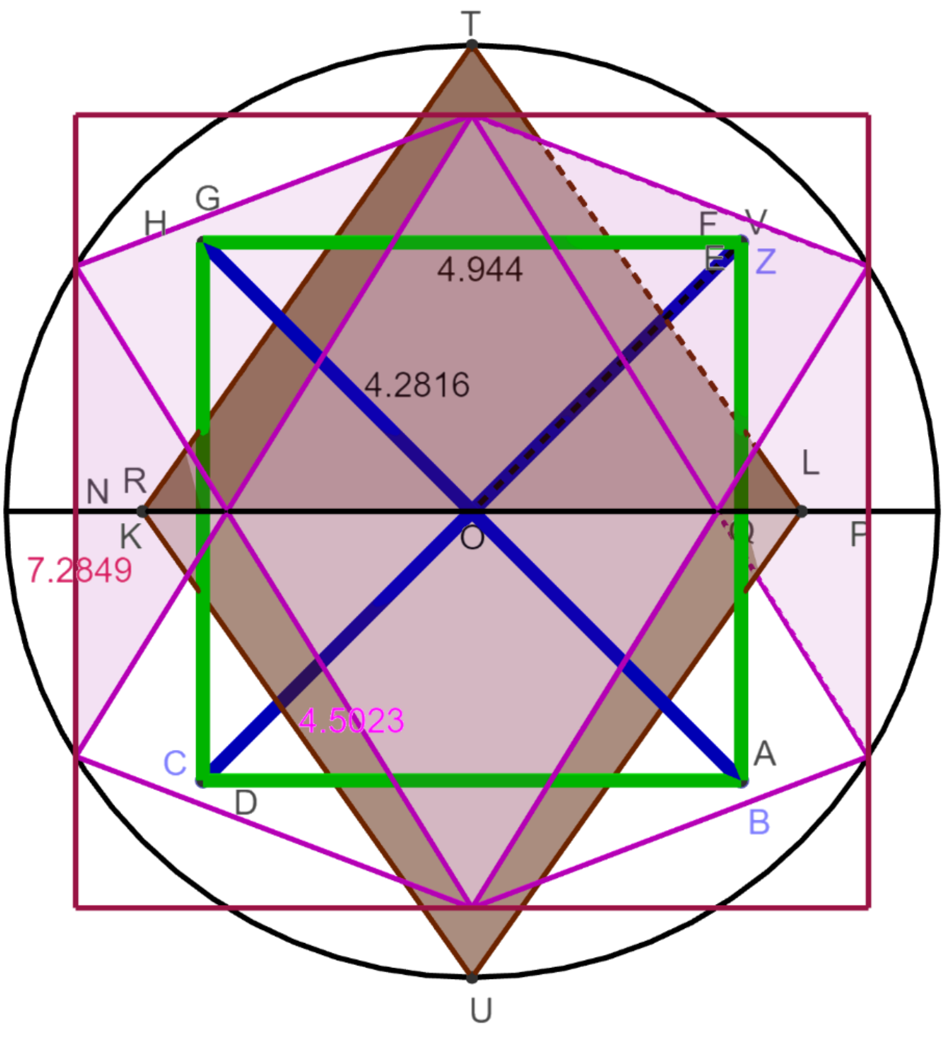


raza sferei=R=4,2816

vedere 3D cu 4 solide înscrise în aceeași sfera-lipsește dodecaedrul-din motive tehnice-prea multe linii (nu se mai vad bine solidele)



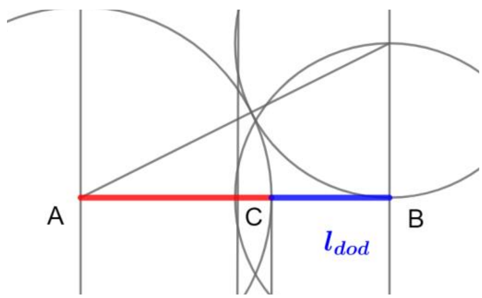
proiecție ortogonală cu cele 4 solide: icosaedrul-violet, este ca un hexagon regulat, tetraedrul-albastru, înscris în cubul verde (latura 4,944-apotema pentagonului-4,5023-cu o mica eroare), octaedrul-maron, cu vârfurile T,U și cercul mare al sferei circumscrise cu raza 4,2816. Cu maron apare și cubul mare de pornire-redus cu latura 7,285 (de la 8), pe care am construit icosaedrul cu latura redusa de la 4,944 la 4,5021.

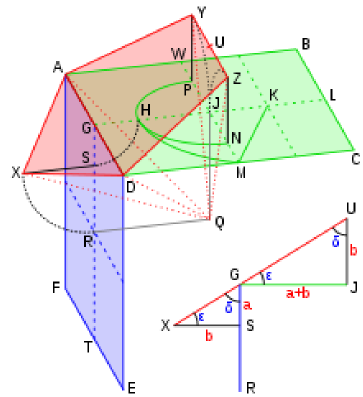


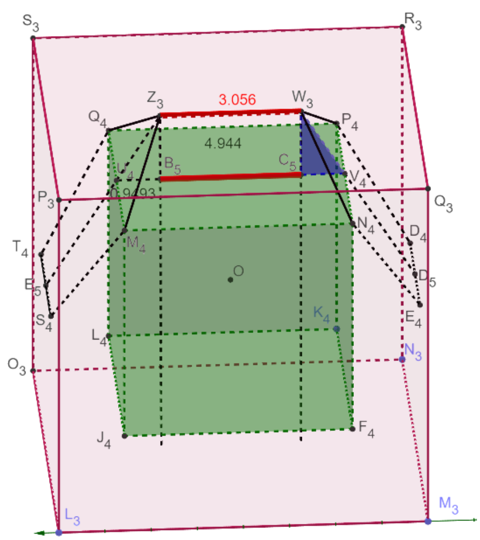
Euclid (300BC) în cartea sa *Elemente* a definit construcția dodecagonului regulat. Astfel el a pornit cu problema rezolvată și a construit pas cu pas elementele geometrice. Luăm 2 fețe pentagonale cu laturile pe medianele fețelor cubului (S_4T_4 și D_4E_4). Știm ca în cubul mare-roșu, latura dodecaedrului și apotema pentagonului sunt în raport de aur

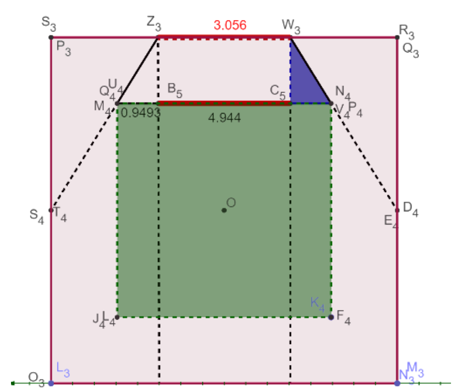
$$\frac{M_4Q_4}{S_4T_4} = \frac{N_4P_4}{D_4E_4} = \frac{a_4}{l_{dod}} = \frac{4{,}944}{3{,}056} = \frac{l_{cub}}{l_{icos}} = \frac{8}{4{,}944} = \frac{S_3R_3}{P_4Q_4} = \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC} = \text{Ø}$$

Am ales cubul mare-roșu cu latura 8 și cubul mic-verde cu latura 4,944-ca în construcțiile anterioare (jos-stânga)/dreapta -jos-construcția lui Euclid din *Elemente*







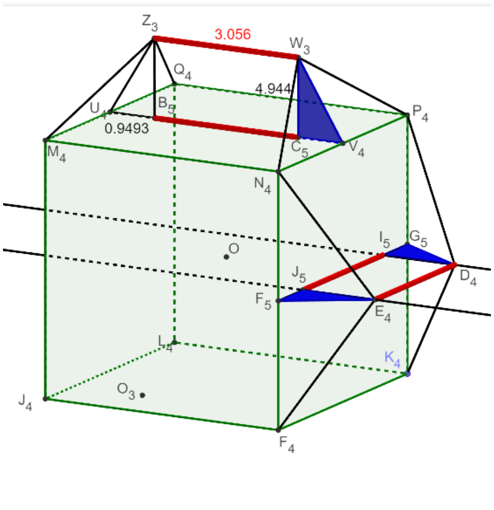


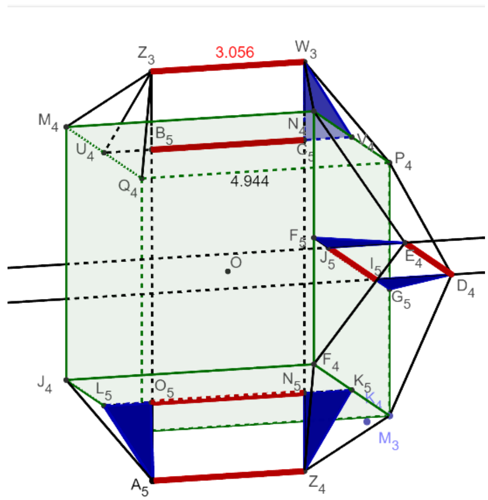
Construim cu geogebra, acoperișul-pe cubul verde format de apotemele pentagonului și obținem latura pentagonului-dodecaedru $Z_3W_3 = B_5C_5 = D_4E_4 = 3{,}056$

Pentru a obține Z_3W_3 se construiește triunghiul albastru $W_3C_5V_4$ cu ipotenuza (1,7961=W_3V_4 =înălțime în triunghiul isoscel $W_3N_4P_4$) și cateta C_5V_4=0,9493=$\frac{U_4V_4-B_5C_5}{2} = \frac{4{,}944-3{,}056}{2}$ deci $W_3C_5 = Z_3B_5 = 1{,}528 = \sqrt{W_3{V_4}^2 - C_5{V_4}^2}$

(pe linia mediană U_4V_4 se pune la mijloc latura pentagonului B_5C_5 și se obțin punctele-picioare B_5 *și* C_5, din care se ridica cateta C_5W_3 și cateta B_5Z_3 ,ca în construcția lui Euclid.

Se repeta construcția (acoperișului) pe restul de 5 fețe și avem muchiile D_4E_4/A_5Z_4 .....care se unesc cu vârfurile cubului de pornire verde și avem dodecaedrul complet.

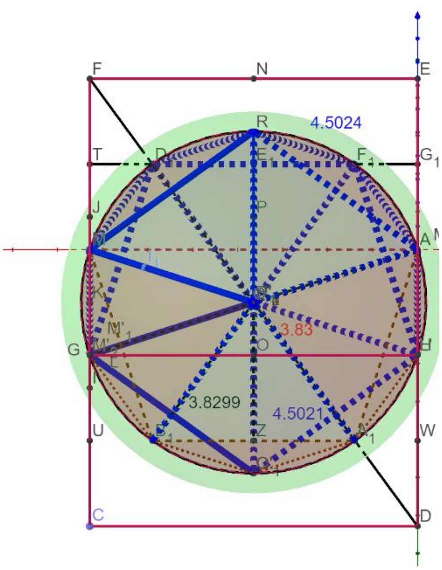


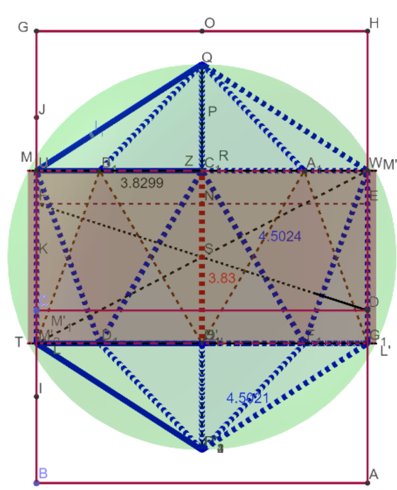


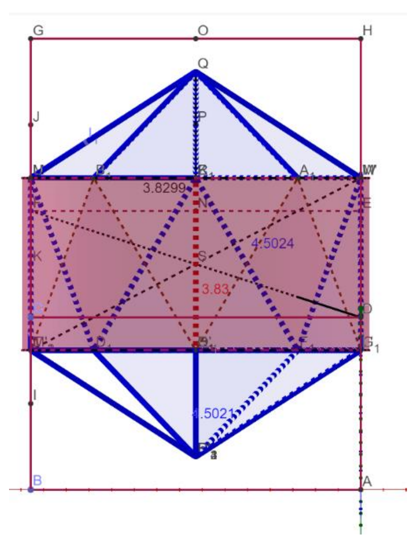
Construcția icosaedrului-după Euclid

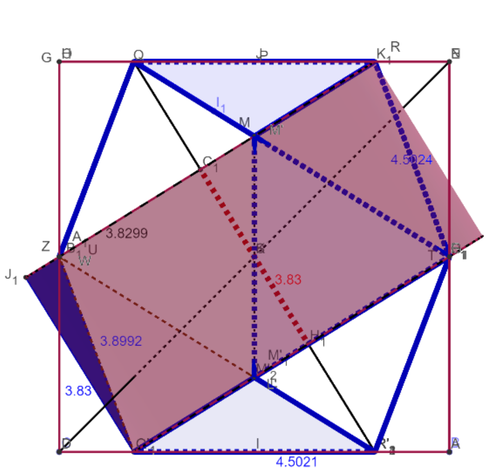
Ca și la dodecaedru, pornim de la construcția rezolvată

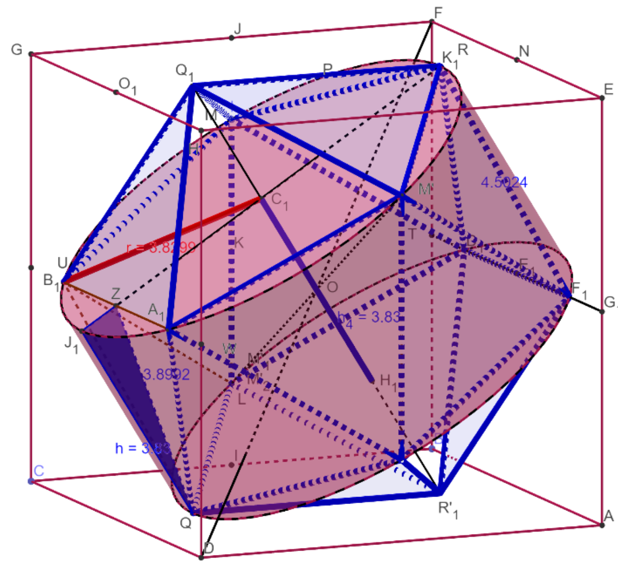
În mai multe proiecții -de sus și laterale se observa proprietățile solidului. Văzut de sus , o piramida cu baza pentagonul regulat, cu latura=l icos. Un cilindru-roșu, sub el alta piramida cu baza același pentagon, dar defazat cu 36 grade, astfel ca apar vârfurile unui decagon regulat(vederea de sus stânga). Sfera circumscrisa-verde trece prin vârfurile piramidelor pentagonale-vedere mijloc. Cubul mare-roșu, nu se va mai folosi.







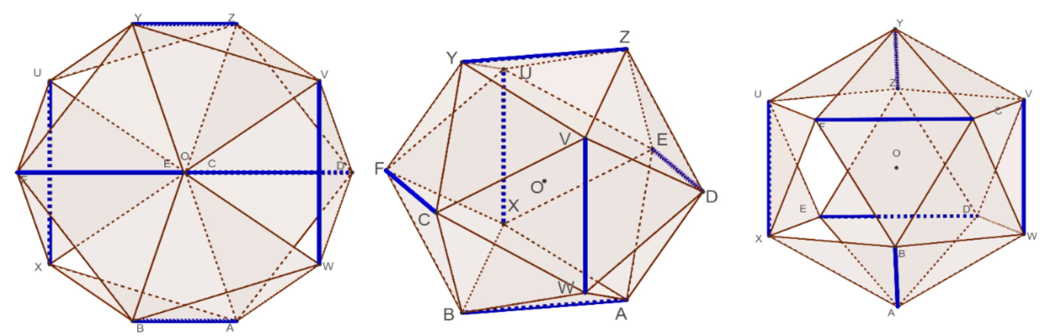


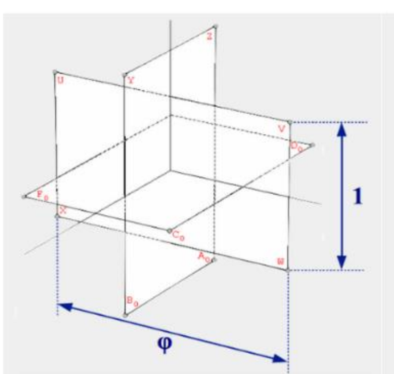


În cilindrul-roșu, cercurile de baza au raza r=C_1B_1=3,83=C_1H_1=înălțimea-generatoarea cilindrului

diferite proiecții-la mijloc se vad laturile de pornire-pe medianele fetelor din cubul mare-roșu

mai jos coordonatele vârfurilor, daca se considera latura solidului=1 (în construcția de sus este A_1B_1=4,5021, în cercul cilindrului de sus cu centrul în C_1)





$U(0,-\frac{\emptyset}{2},\frac{1}{2})$	$C(\frac{\emptyset}{2},\frac{1}{2},0)$
$V(0,\frac{\emptyset}{2},\frac{1}{2})$	$D(-\frac{\emptyset}{2},\frac{1}{2},0)$
$W(-\frac{\emptyset}{2},\frac{\emptyset}{2},-\frac{1}{2})$	$E(-\frac{\emptyset}{2},-\frac{1}{2},0)$
$X(0,-\frac{\emptyset}{2},-\frac{1}{2})$	$F(\frac{\emptyset}{2},-\frac{1}{2},0)$
$Y(\frac{1}{2},0,\frac{\emptyset}{2})$	
$Z(-\frac{1}{2},0,\frac{\emptyset}{2})$	
$A(-\frac{1}{2},0,-\frac{\emptyset}{2})$	
$B(\frac{1}{2},0,-\frac{\emptyset}{2})$	

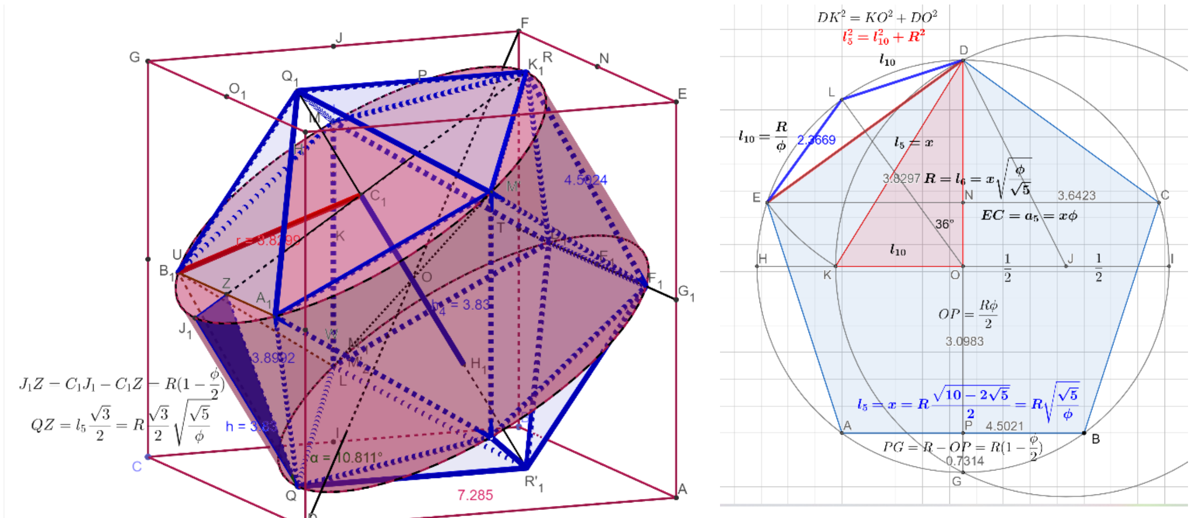
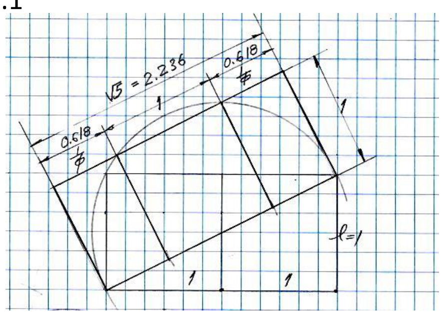


Fig.1



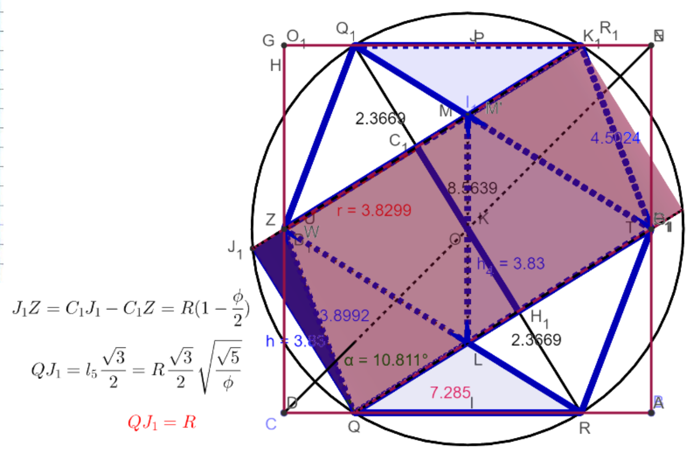


Fig.2

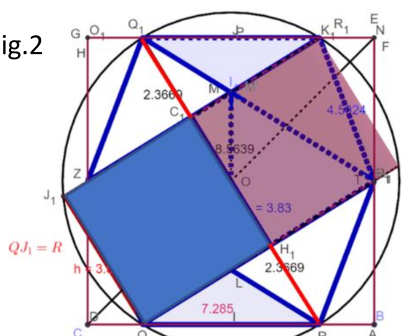


Fig.3

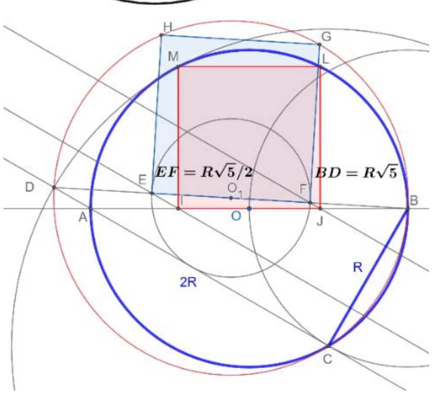
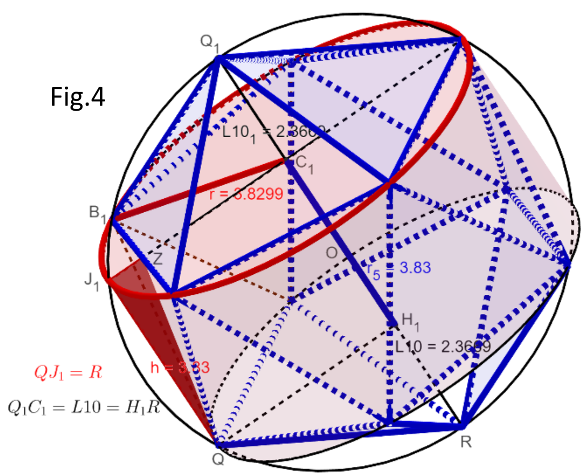


Fig.4



Din geometria pentagonului-în plan-dreapta sus avem construcția pentagonului-după Ptolemeu și ecuația celebra $\boldsymbol{l_5}^2 = \boldsymbol{l_6}^2 + \boldsymbol{l_{10}}^2$ sau $DK^2 = DO^2 + KO^2$

Apotema pentagonului $OP = \frac{R\emptyset}{2}$ latura pentagonului $AB = R\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} = R\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{\emptyset}}$

Diagonala EC și latura AB sunt în raport $\emptyset = \frac{EC}{AB}$ diferența $PG = OG - OP = R\left(1 - \frac{\emptyset}{2}\right) = J_1Z$ în triunghiul albastru QJ_1Z. Din calcule, Pitagora, rezulta $QJ_1 = R =$ înălțimea cilindrului

Deci cilindrul roșu are înălțimea-generatoarea egală cu R-raza cercurilor de bază ($C_1B_1 = 3{,}83$)

Vârfurile piramidelor-pentagonale- R și Q_1 delimitează sfera circumscrisa-verde, cu diametrul RQ_1.

Fig. 1-3 arata o proprietate remarcabila , legata de numărul de aur

Cum se înscrie un *pătrat* într-un *semicerc*? Problema este rezolvata la studiul pentagonului.

Fig. 2 arata pătratul-albastru înscris în semicercul cu centru O și diametrul sferei circumscrise

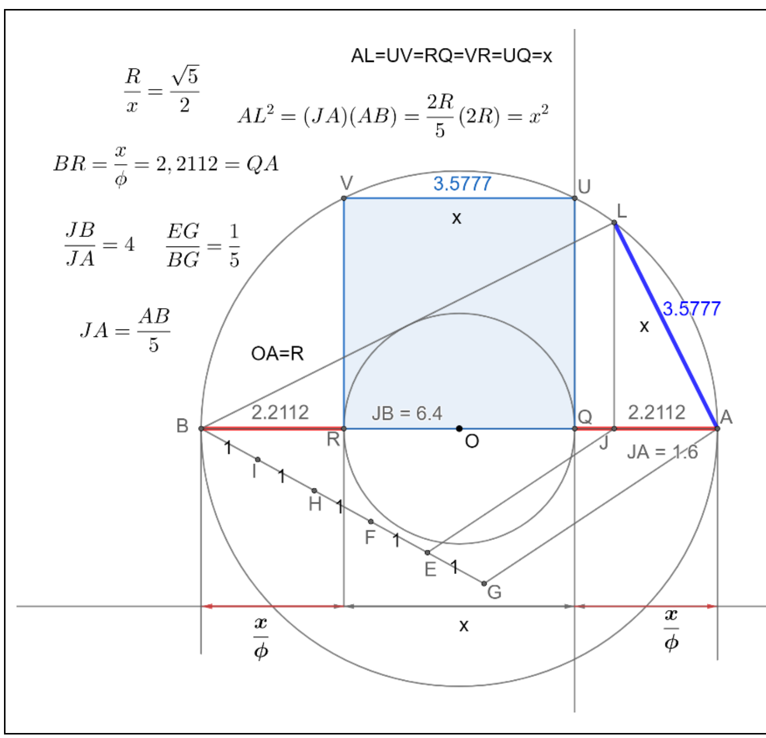
$Q_1R = C_1H_1 + C_1Q_1 + RH_1$ =3,83+2,3669+2,3669 (DB=EF+DE+BF în Fig.3)

Fig.3 arata rezolvarea grafică a problemei. (prin Pitagora)

Se da cercul (O,R)-centrul O, diametrul AB. Se construiește triunghiul BCD cu laturile R și 2R .cercul-roșu circumscris triunghiului BCD are diametrul BD=2R$\sqrt{5}$ apoi cu centrul în O1 se construiește EF=BD/2 ca latura a pătratului EFGH înscris în cercul mare-roșu. Se transpune prin proiecții pătratul roșu IJLM în cercul de baza albastru inițial și problema este rezolvata.

Aa2 a construcție-cu teorema catetei (AL) cu proiecția AJ=AB/5. Se împarte AB în 5 părți egale și rezulta pătratul albastru RQUV înscris în cerc.

UV=QR=x și BR=AQ=1/x



(Fig.5)

$$\emptyset = \frac{3{,}5777}{2{,}112} = \frac{UV}{BR} = \frac{R}{\boldsymbol{l_{10}}} = \frac{OD}{DL}$$

Aceeași situație se găsește în geometria 3 D a icosaedrului Fig.4 și Fig.2-5

Pătratul albastru cu latura egala cu raza cercului pentagonului (R=3,83) se înscrie în cercul mare, unde Q1R este raza sferei. Vârfurile piramidelor-cu baza pentagoane definesc pe diametrul sferei (Q1R) aceeași configurație ca în Fig.2-5. (pătratul se înscrie în semicerc)

L10 (latura decagonului regulat-geometria pentagonului)=2,3669=C1Q1=H1R și la mijloc

C1H1=R=înălțimea cilindrului=raza cercului circumscris pentagonului de baza.

4 SOLIDE regulate-fără dodecaedru, cu valorile laturilor, înscrise în aceeași sfera-cubul de pornire-roșu (l=7,285)

Se observa în 3D, cum cubul -roșu și verde definesc construcțiile celor 4 solide. Cubul roșu susține icosaedrul (violet). Cubul verde este cel înscris în sfera. (acest cub susține 8 vârfuri ale dodecaedrului) Tetraedrul albastru se înscrie în cub-pe diagonale. Dodecaedrul lipsește, ca și cubul mare cu latura de 8, folosit în construcțiile anterioare.

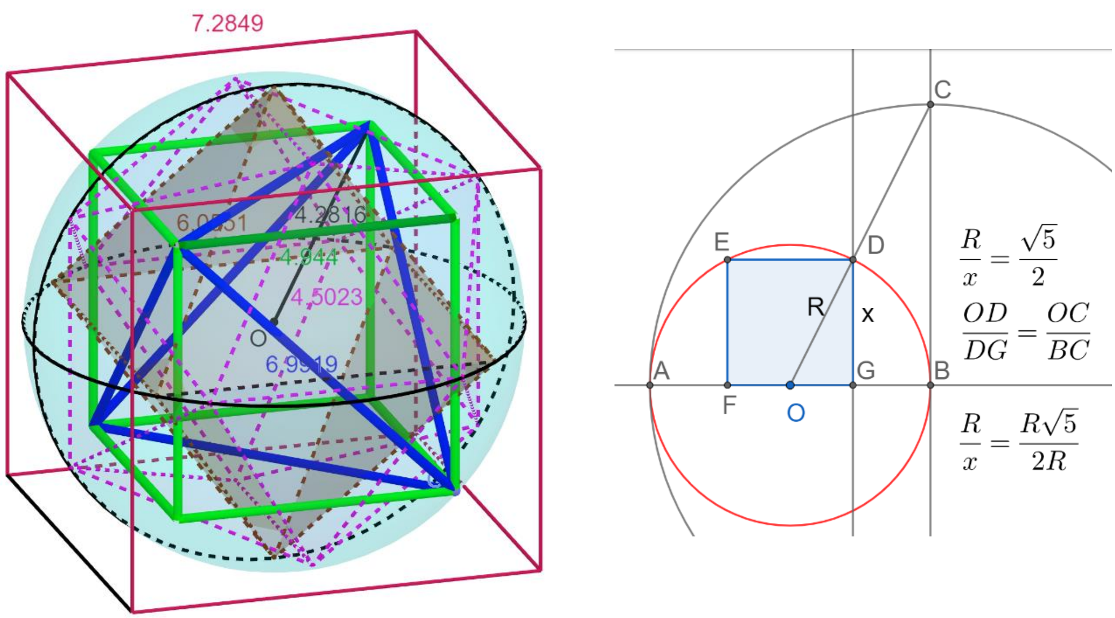
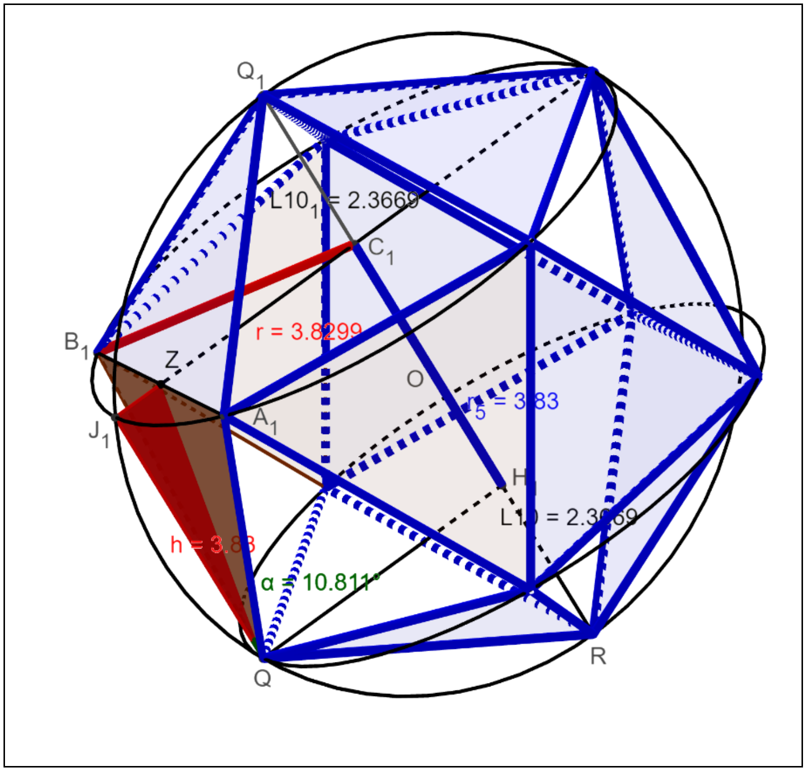


Fig.6

(în Fig.6 altă construcție a pătratului înscris în semicerc, mai elegantă-triunghiul OBC cu catetele R și 2R.Ipotenuza OC taie cercul în vârful căutat D, care definește pătratul DEFG)

Revenim la geometria 3D a icosaedrului

Inclinarea fețelor laterale-pe suprafața cilindrului Fig.7



Fețele laterale-10, alternează-Q1defazat cu 36 grade, ca dinții unui ferăstrău. Văzute de sus-din vârful Q_1, definesc vârfurile unui decagon regulat (5 sus și 5 jos). Fața A_1B_1Q este inclinată spre exterior cu unghiul ZQJ_1=10,881 grade. J_1 se deplaseaza spre interior catre Z pe directia J_1C_1 cu inclinația din figură.

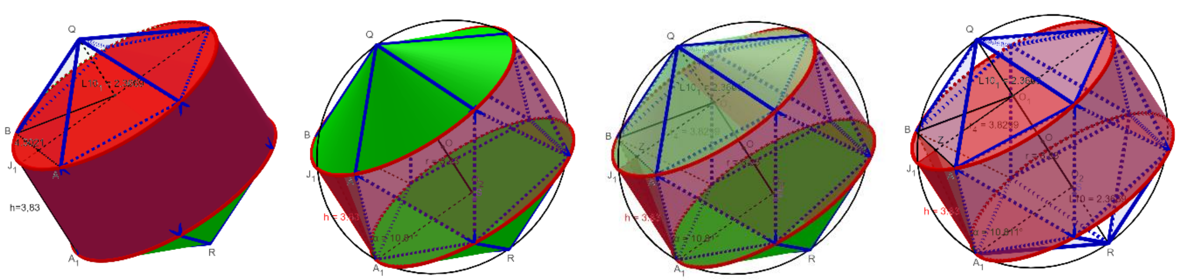
Din calcule rezulta înălțimea cilindrului egala cu=h=QJ_1 =raza cercului circumscris pentagonului.

Triunghiul $Q_1C_1B_1$ verifică ecuația celebra $\boldsymbol{l_5}^2 = \boldsymbol{l_6}^2 + \boldsymbol{l_{10}}^2$ $\quad Q_1B_1{}^2 = C_1B_1{}^2 + Q_1C_1{}^2$

Toata geometria este în jurul pentagonului și a numărului de aur Ø=1,618

Sa concluzionăm construcția lui Euclid:

sa se construiască un icosaedru cu latura $\boldsymbol{l_5}$



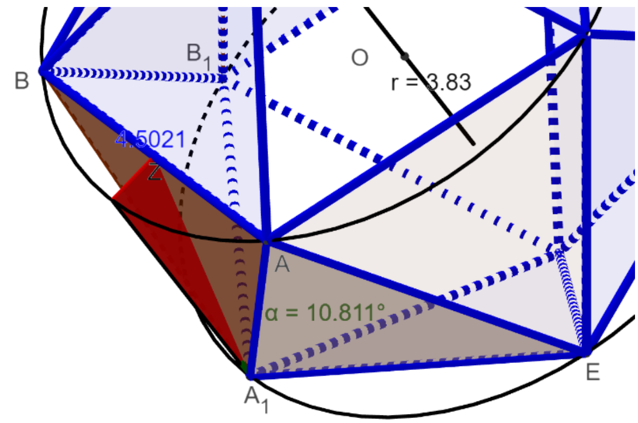
-se construiește un cilindru-roșu cu cercurile de baza R=$\frac{2l_5}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$ și înălțimea h=R

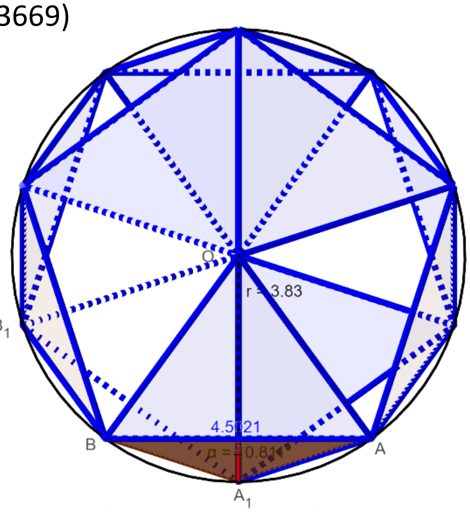
-se construiesc 2 conuri-verzi , pe bazele cilindrului cu înălțimea-generatoarea $\boldsymbol{l_{10}}$

$\boldsymbol{l_{10}}$ este latura decagonului înscris în cercul cu raza R. se obțin vârfurile (Q-R)

-se construiesc pentagoanele sus și jos, cu latura $\boldsymbol{l_5}$, defazate cu 36°ABCDE și $A_1B_1C_1D_1E_1$

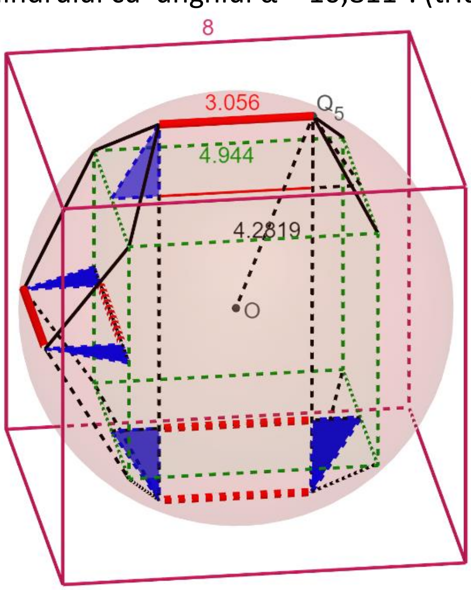
(avem valorile R=3,83=h cilindru, $\boldsymbol{l_5}$=4,5021 și $\boldsymbol{l_{10}}$=2,3669)



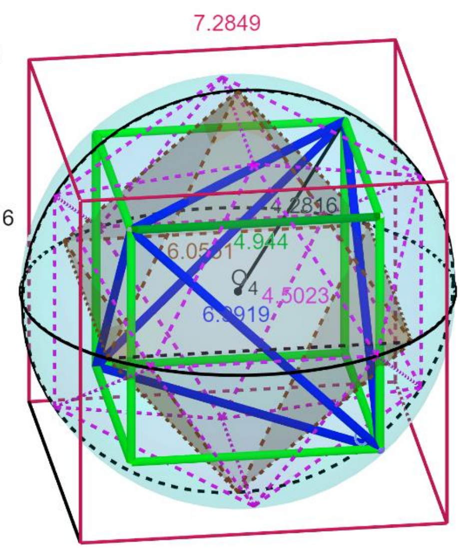


-se unesc vârfurile pentagonului de sus cu cele ale pentagonului de jos și rezulta icosaedrul căutat

-fețele-dinții ferăstrăului, ABA_1 sunt inclinate față de planul vertical dintre bazele cilindrului cu unghiul α= 10,811°. (triunghiul QJ_1Z tgα=$\frac{J_1Z}{J_1Q}$) (Fig.7)



l-tetra=6,9919
l-cub=4,944
l-octa=6,0551
l-icos=4,5021
l-dod=3,056
R-sfera=4,2816

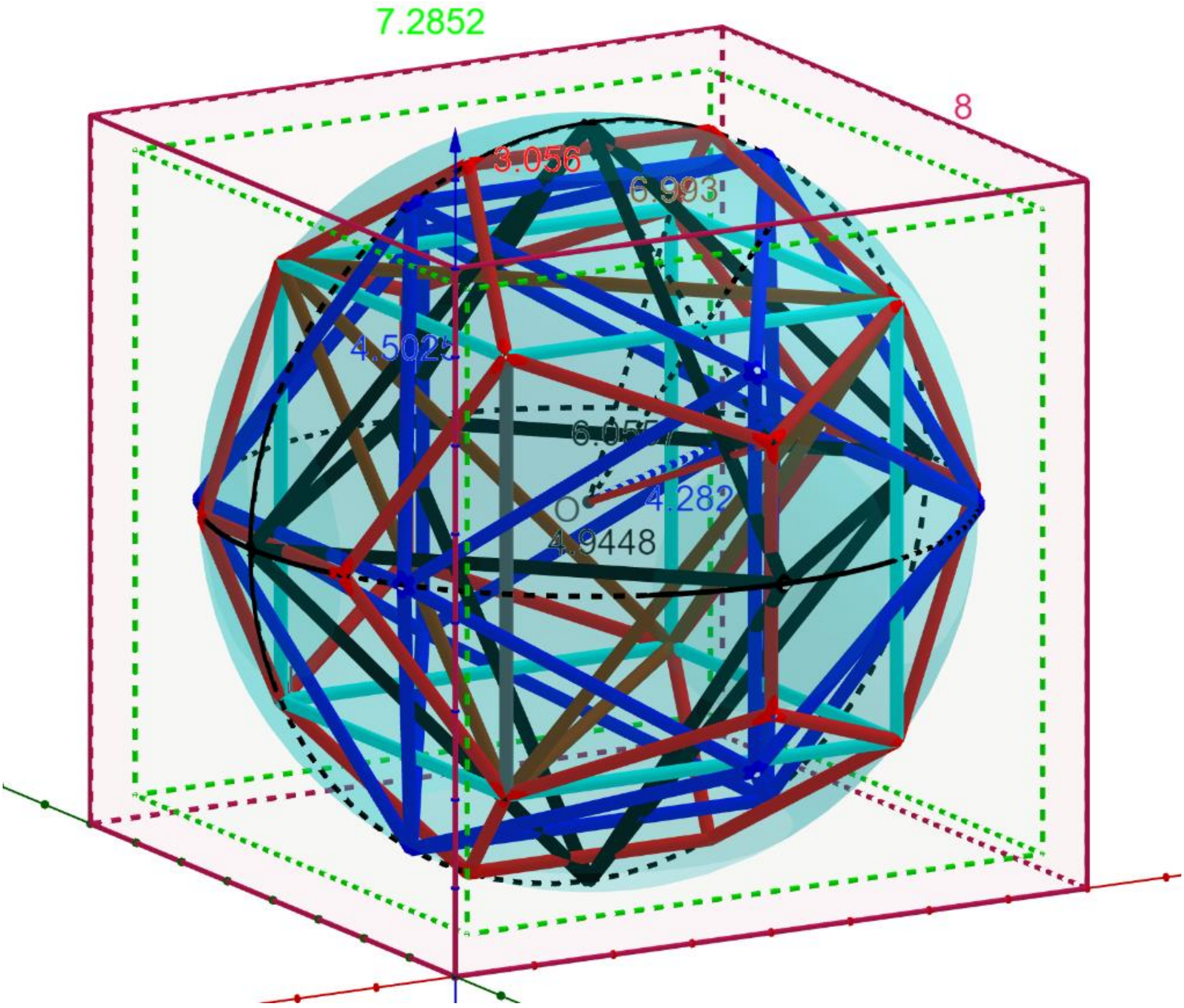


(stânga-dodecaedrul, după metoda lui Euclid-fețele laterale pentagonale)

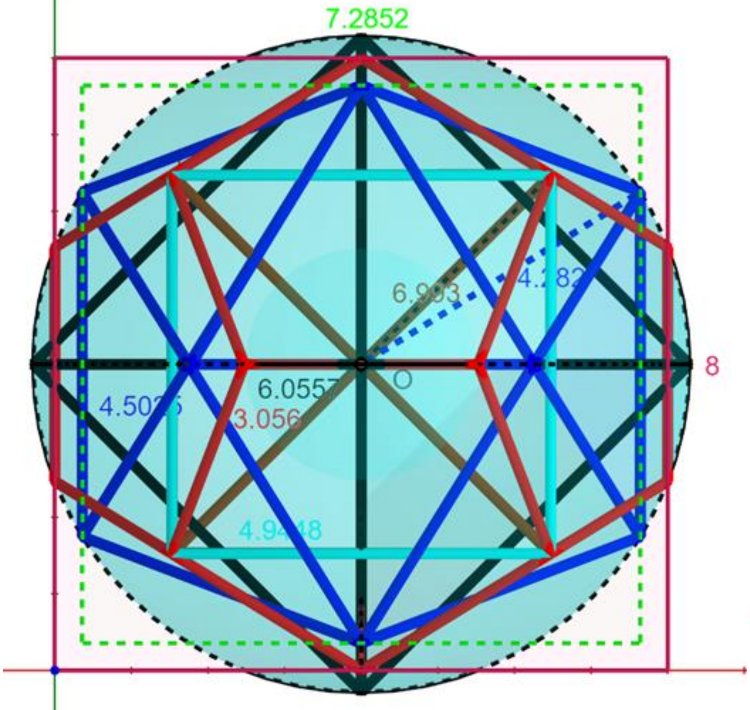
Cele 5 poliedre înscrise în aceeași sferă (stânga-dreapta) cu laturile lor și raza sferei.

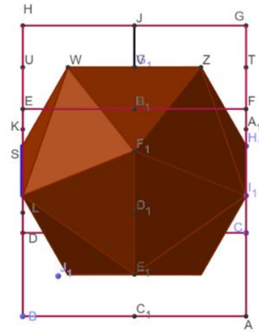
Cele 5 poliedre înscrise în aceeași sferă cu laturile lor și raza sferei.

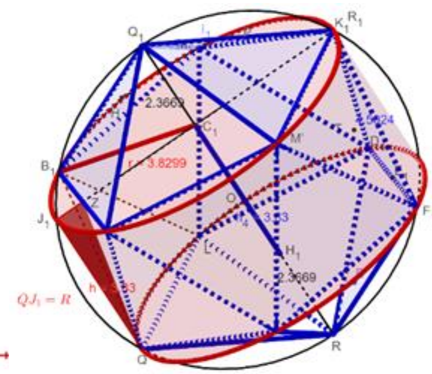
Cub mare-de pornire roșu (pentru dodecaedru)(8)/cub redus-(pentru icosaedru 7,2852)/R sfera (4,282)



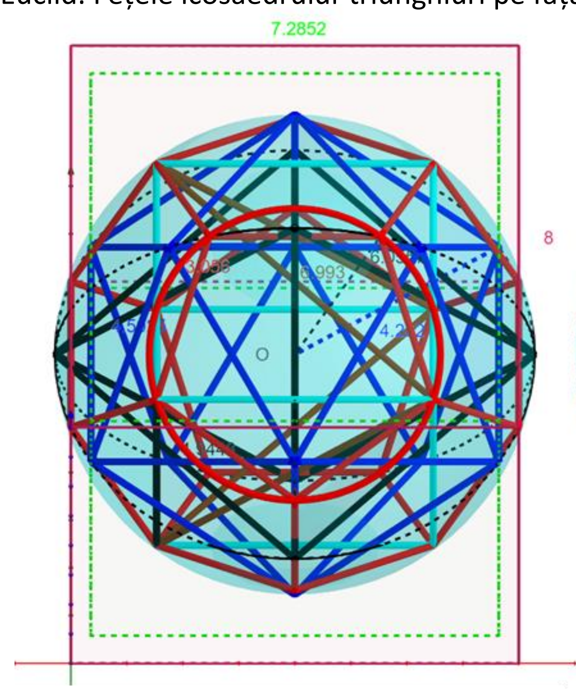
Dodecaedru(3,056)/icosaedru (4,5025)/cub-verde mic înscris (4,944)/tetraedru-maro (6,993)/octaedru-negru (6,0557) proiecție ortogonala cu dimensiunile poliedrelor

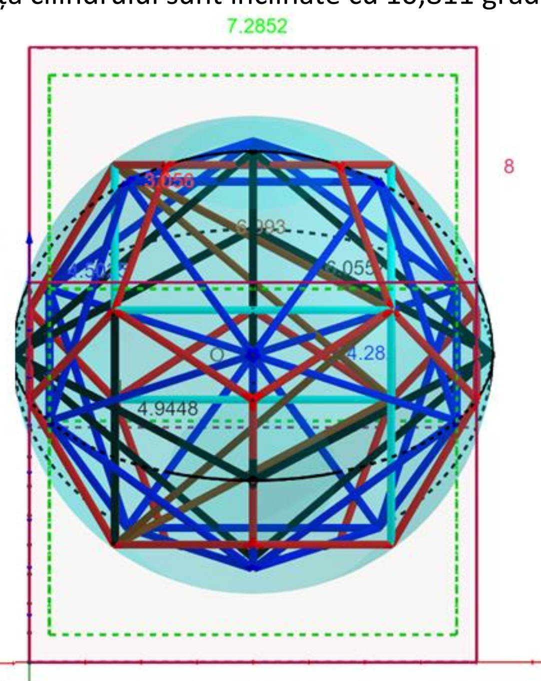


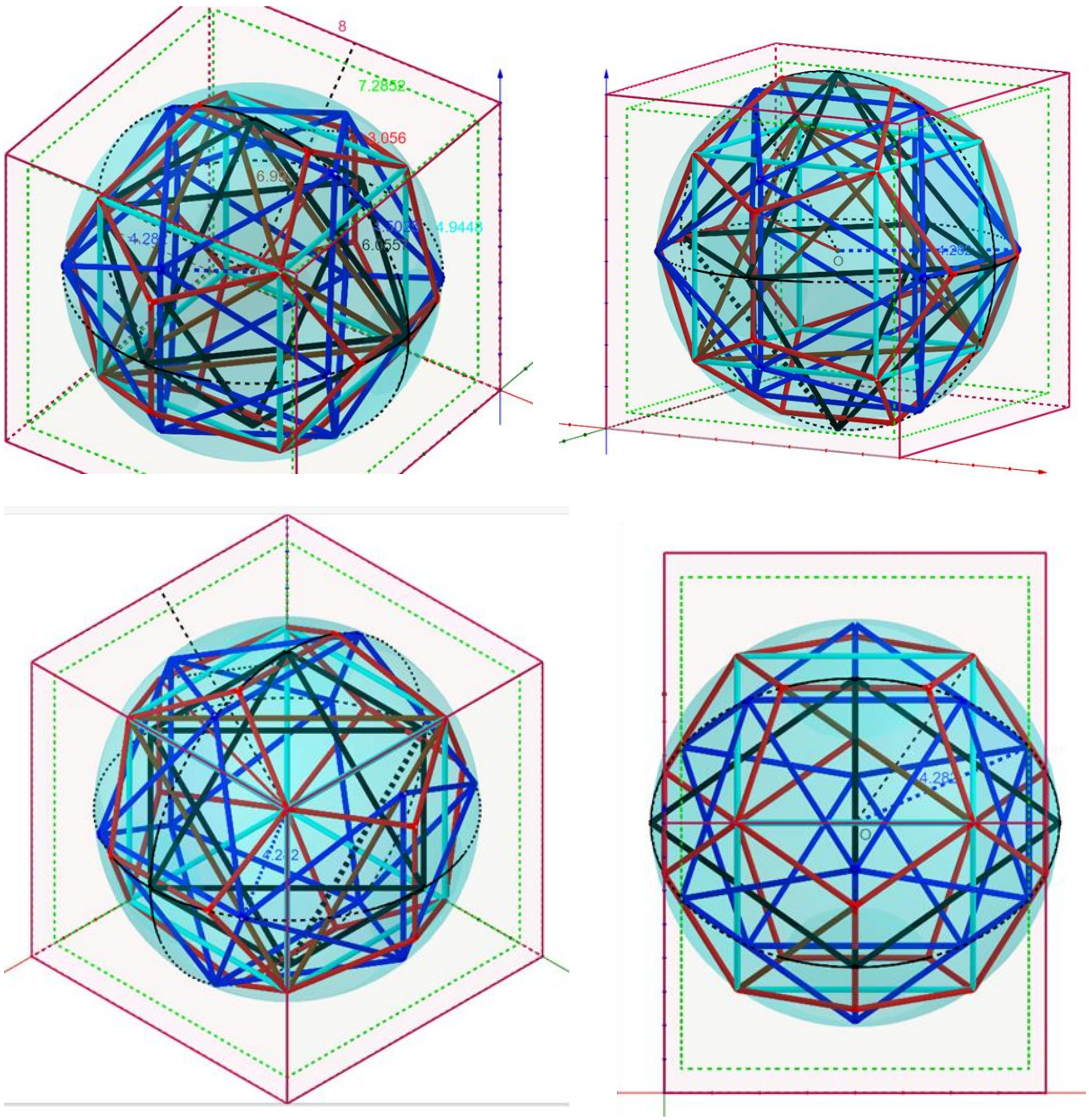




Icosaedrul-albastru (vârfurile sunt un decagon regulat)-dreapta. Dodecaedrul-roșu (vârfurile sunt un decagon regulat)/pentagonul înscris în cercul roșu în adevărată mărime (3,056). Se vede dreptunghiul albastru și cele 2 vârfuri ale icosaedrului, ca în construcția lui Euclid. Fețele icosaedrului-triunghiuri pe fața cilindrului sunt inclinate cu 10,811 grade







Proiecții și vederi diferite, izometrice (unghiurile axelor egale) cu valorile calculate de geogebra-cu 4 zecimale exacte.

Aplicații practice

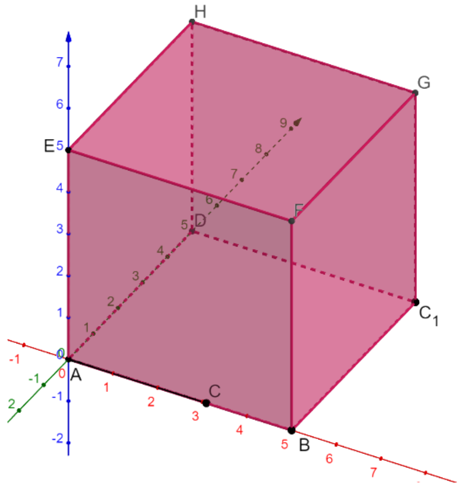
1. Sa se construiască un dodecaedru regulat pe un cub cu latura de 5 cm

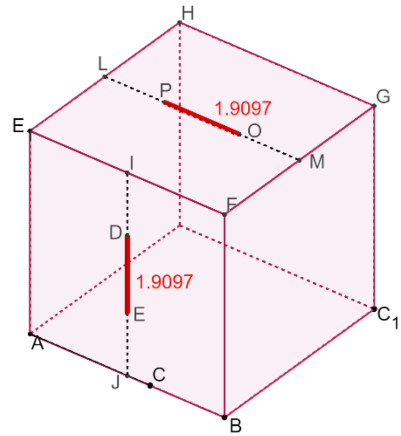
-sa consideram metoda mai eleganta, legata de geometria cubului

construim pe segmentul AB=5 (cm) punctul C astfel ca $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC} = \emptyset = 1{,}618$ avem segmentul AC=3,0902 și BC=1,9097 (latura dodecaedrului)

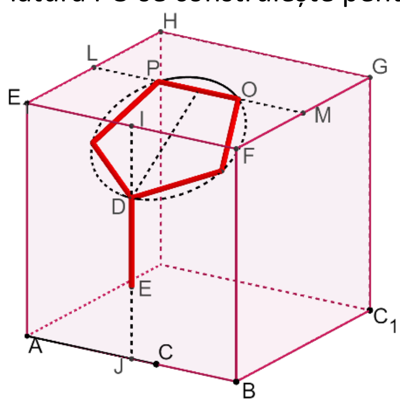
-construim cubul roșu de pornire cu latura AB=5

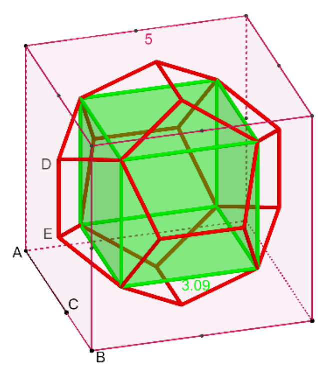
-pe mediana fetei cubului luam DE=1,9097/la fel PO=1,9097





-cu latura PO se construiește pentagonul regulat-roșu-prima față a dodecaedrului

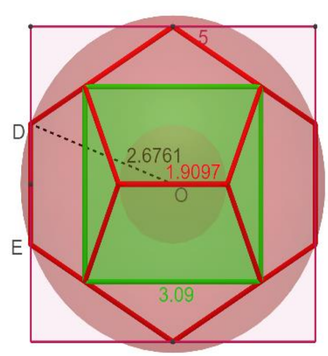


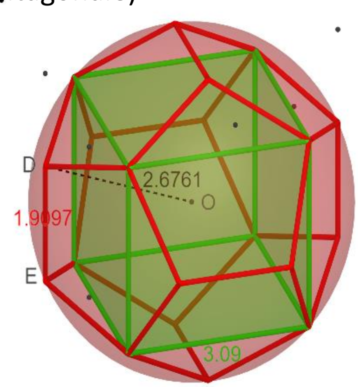


-se construiește cubul verde-mic cu latura apotema pentagonului (3,0902=1,9097x1,618)

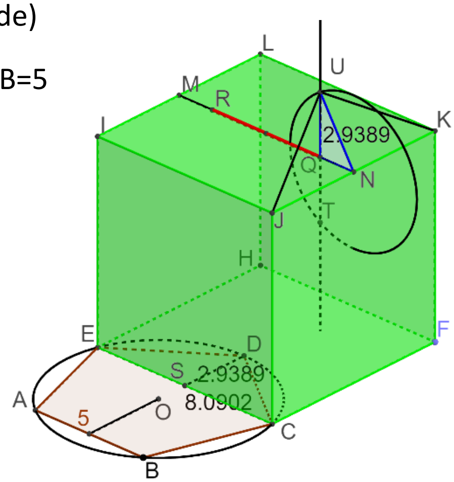
(vârfurile cubului unesc apotemele-diagonalele fețelor pentagonale)

Avem R sfera=2,6761





2. Sa se construiască un dodecaedru regulat cu latura de 5 cm, folosind metoda lui Euclid (construim acoperișuri pe fiecare față a cubului verde)



-consideram latura data la pentagonul de pornire AB=5

-construim EC=5x1,618=8,0902 (diagonala)

-pe EC se construiește cubul verde-intermediar

-se ia pe mediana MN latura data NR=5=AB

-se ridica perpendiculara-verticala din piciorul Q

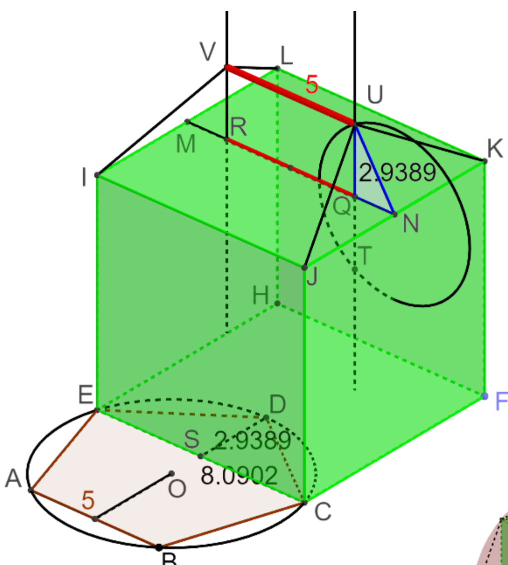
-triunghiurile EDC și UJK sunt egale

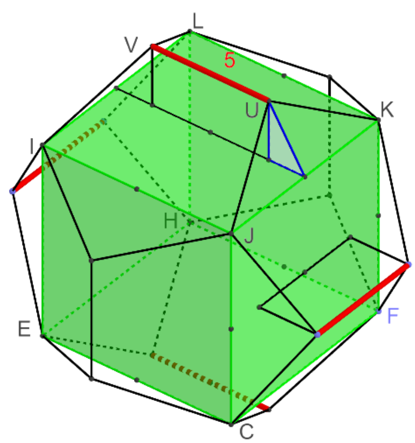
-se duce în planul median vertical triunghiul UQN

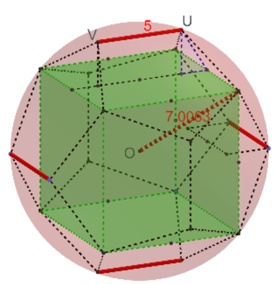
UN =SD=2,9389 și se obține vârful căutat U, deci QU=2,5 este înălțimea acoperișului (Euclid)

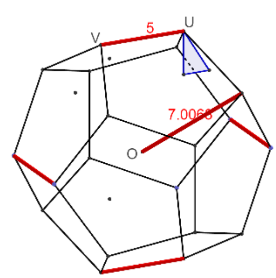
-se duce UV=QR=5 și obținem latura dodecaedrului UV pentru fața cubului IJKL

-se repeta construcția acoperișului pe fiecare față









Raza sferei R=7,0063

3. Sa se construiască un icosaedru regulat cu latura de 5 cm, folosind metoda cubului

-consideram latura data la pentagonul de pornire AB=5

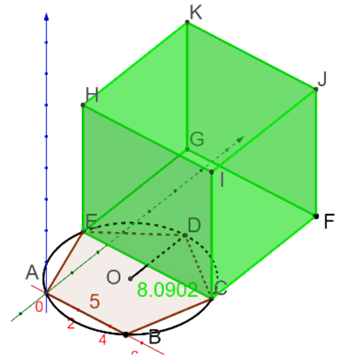
-construim EC=5x1,618=8,0902 (diagonala)

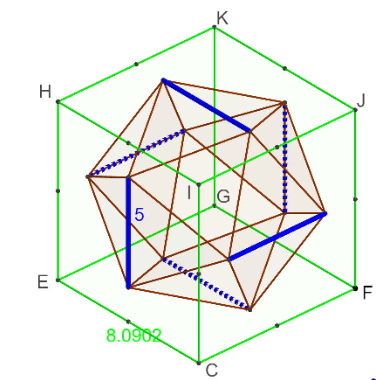
-pe EC se construiește cubul verde-intermediar

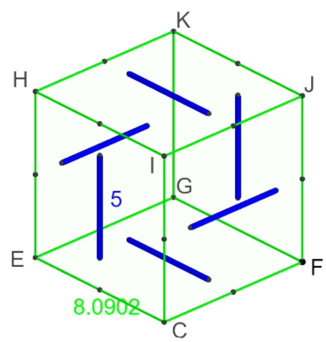
-se ia pe mediana cubului latura data PQ=5=AB

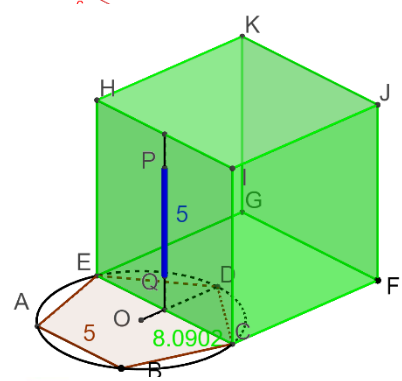
-se construiesc cele 6 laturi pe 6 fețe

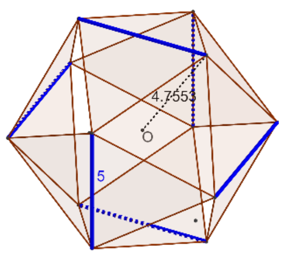
-se unesc toate vârfurile

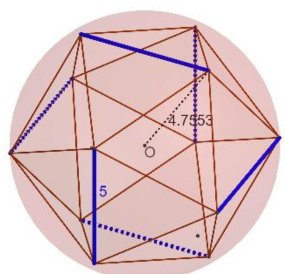












Raza sferei R=4,7653

4. Sa se construiască un icosaedru regulat cu latura de 5 cm, folosind metoda Euclid

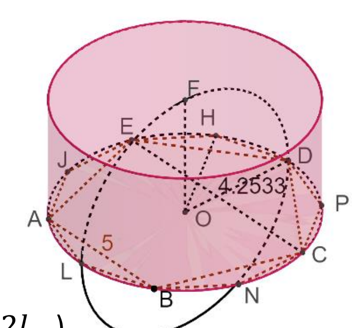
-se construiește pentagonul ABCDE cu latura 5

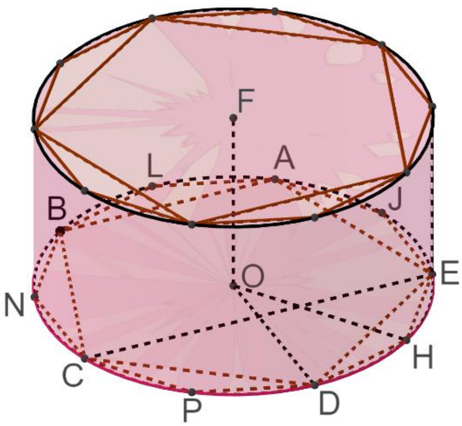
-se construiește cilindrul cu înălțimea OF=R=4,2533

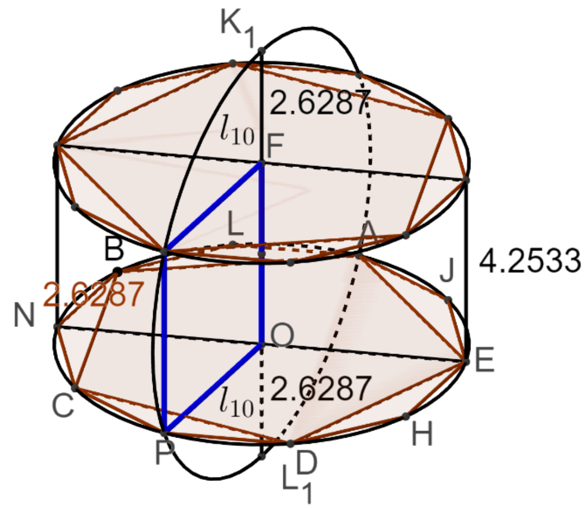
-pe bazele cilindrului se construiesc cele 2 pentagoane defazate cu 36°

-se construiesc vârfurile conurilor K_1, L_1,

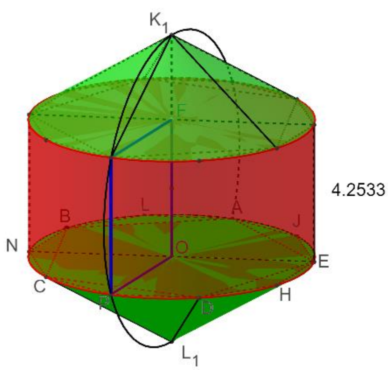
($K_1F = L_1O = l_{10}$=2,6287=latura decagonului/$K_1L_1 = R + 2l_{10}$)

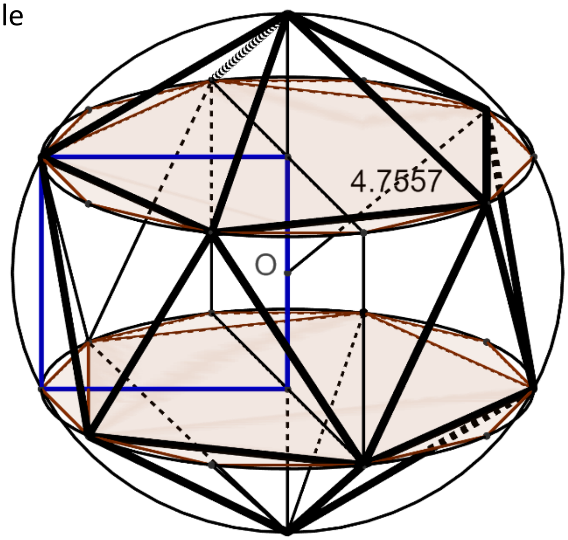






cele 2conuri și cilindrul, apoi se unesc vârfurile





Raza sferei R=4,7657

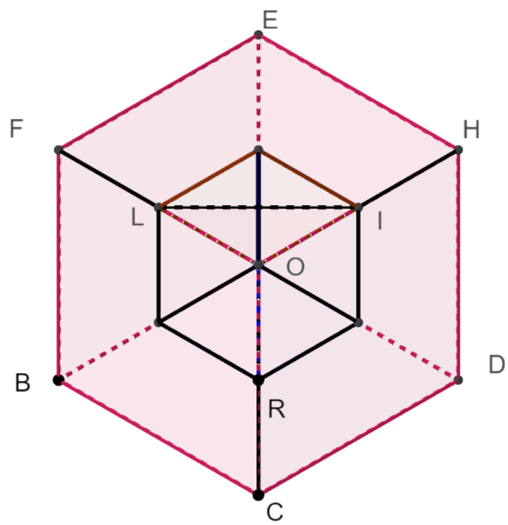
Despre CUB

După cum s-a văzut, în toate construcțiile geometrice, cubul apare mereu și chiar de mai multe ori, la același poliedru. Pentru ultimele 2, cele mai deosebite, apar cubul mare-de pornire-roșu și cubul mic-verde. Cubul este o structură, un schelet pentru celelalte 4, căci fără el, cu mare greutate și lipsuri se pot defini.

Închei geometria poliedrelor cu o ultima problema-legata de cub, de acum 50 de ani, cind mă pregăteam pentru examenul de intrare la Arhitectura. Iată problema:

Dintr-un cub se scoate un alt cub, 1/8 din volumul sau. Se sprijină pe 2 vârfuri opuse diagonal, ca în figura următoare, prezentata în proiecție izometrica (axele egal inclinate la 120°). Se cer vederile laterale .

Aceasta problema mi-a dat bătăi de cap, și nu m-am lăsat până nu am rezolvat-o. Mai mult, am tăiat un cub din lemn, l-am scobit și am tăiat un alt cub mai mic, ca în figura de la examen. Ca sa verific rezultatul geometric, mă delectam cu volumele de lemn, tăiate la precizie. Aceasta provocare, problema nu este deloc ușoară. Îți trebuie o experiență geometrica și o viziune în spațiu deosebita, care nu se învață în școlile noastre. Faptul ca s-a dat la examenul de admitere, era un abuz făcut de profesorii comuniști, care pregăteau acasă copii de demnitari, pe bani grei. Aceștia erau pregătiți de ei și știau dinainte subiectele de examen și intrau fluierând. Eu, din nefericire, am căzut la examen, deși știam geometria conicelor, geometrie proiectivă și mă jucăm cu suprafețele complexe și visam toate formulele la trigonometrie și algebră. Am greșit la un semn și m-au picat frumos la examenul din vara. În toamna nu mai erau locuri la Arhitectură și am schimbat cu Politehnica unde am intrat primul!



Iată singura vedere care era la examen. Apărea cubul mic sprijinit pe diagonala LI, pe colțurile L,I ale cubului mare.(OI,OL,OR sunt linii întrerupte)

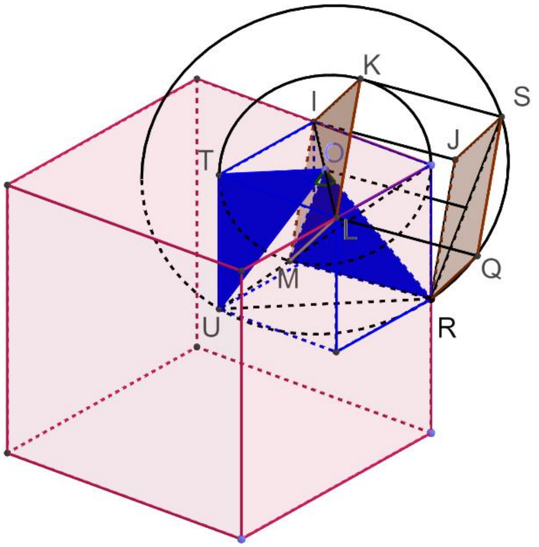
Iată problema rezolvată:

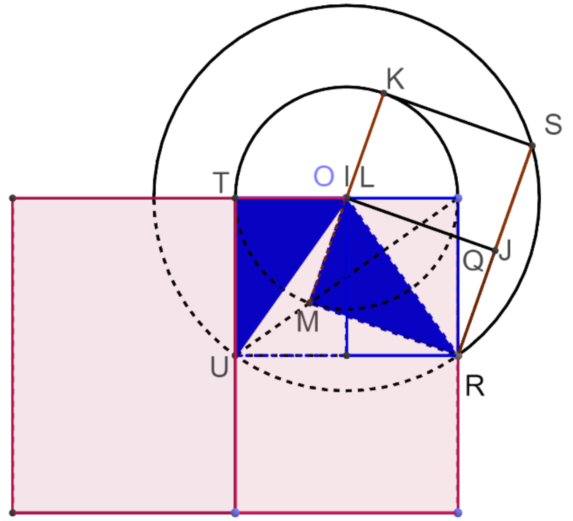
Cu *geogebra* am obținut vederea laterală (dinspre diagonala BD, pe direcția LI)

Triunghiurile albastre sunt pentru a arata geometria cubului mic rotit (70,529°) în jurul diagonalei LI, până ce vârful R atinge vârful cubului mare, care a fost scobit.

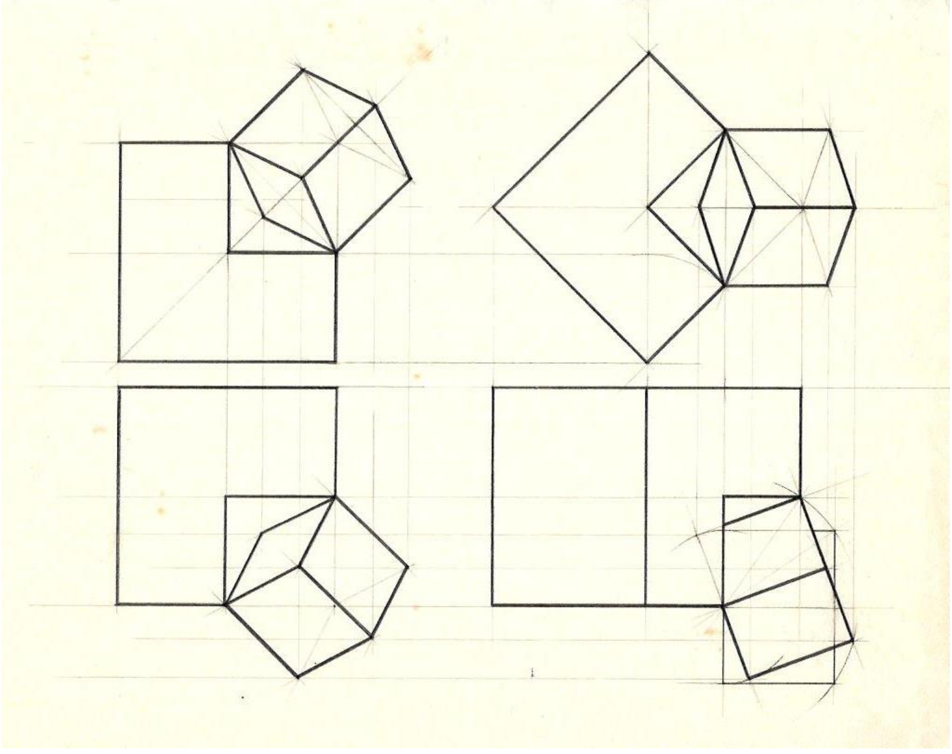
Triunghiurile OTU se rotește în jurul centrului O (se vad cercurile de rotație), până ce vârful cubului mic R se așază exact peste vârful (R) al cubului mare. Dreptunghiul MRSK da conturul cubului rotit, care se sprijină pe vârfurile I, L.

Proiecția din dreapta era cea ceruta la examen, destul de dificila pentru cei care nu au viziune spațială. Corupția din comunism reușea sa introducă și la examene elevi nepregătiți, care deveneau arhitecți...se promova, ca și azi *nepotismul* (aluzie la societățile, așa zise democratice)





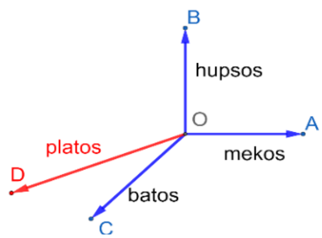
Iată rezolvarea problemei, cu rigla și compasul, când aveam 15 ani!

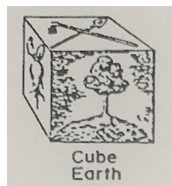


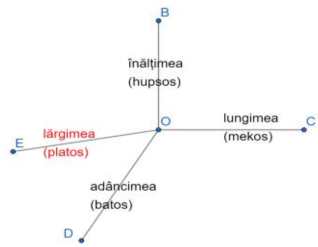
Cubul și Biblia

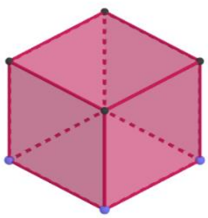
Biblia definește 4 dimensiuni, lărgimea (platos), lungimea (mekos), adâncimea (batos) și înălțimea (hupsos), când Apostolul Pavel descrie starea plinătății , desăvârșirii omului dinăuntru care și-a predat viața în mâna Domnului.

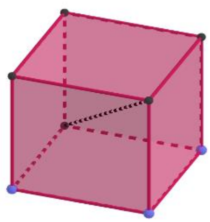
Hristos sa locuiască în inimile voastre prin credință, pentru ca având rădăcina și temelia pusa în dragoste, sa puteți pricepe împreună cu toți sfinții, care este lărgimea, lungimea, adâncimea și înălțimea. (Efeseni 3,18)

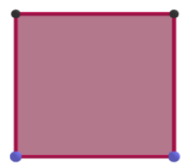












vedere-hexagon vedere-pătrat

Cubul vine din pătrat, are 4 colturi, ca și punctele cardinale. Faptul că el cu cele 3 axe definește spațiul tridimensional, în care noi trăim, il face deosebit. Grecii și savanții Renașterii l-au definit ca simbolul pământului, după cum vedem în desenele lui Kepler. Vedem ca Biblia aduce o dimensiune în plus față de sistemul 3D, definit de Descartes, în sec XVII. Lărgimea-**platos** apare în Biblie de 4 ori. Prima în Efes,3,18 apoi de 3x în Apocalipsa 20,9 și 21,16. *Lărgimea* este deosebită căci poate intra în cele 3 direcții-axe A,B,C, ca un burghiu care lărgește gaura în direcții diferite. Se refera aici la lărgimea inimii, la dimensiunea iubirii și dragostei, la care noi toți suntem chemați. În Vechiul Testament, larg și lărgime apare mereu, în psalmii lui David sau la profeți.

Lărgești drumul sub pașii mei și picioarele mele nu se clatină (2 Samuel 22,37)

Scoate-mă la loc *larg*, când sunt în strâmtorare (Psalm 4,1)

Îmi vei pune picioarele la loc *larg* (Psalm 31,8)

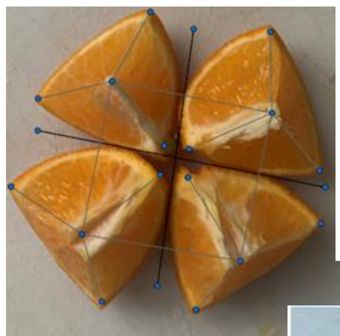
Domnul m-a ascultat și m-a scos la *larg* (Psalm 118,32)

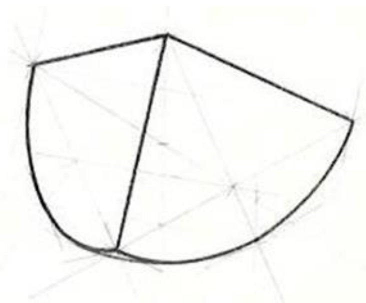
Voi umbla în loc *larg* (Psalm 119,45)

Problemă

Se taie o sferă în 2 părți egale. Una din semisfere se taie în 4 părți egale, care prin gravitație rămân pe masă, atingând planul mesei în 4 puncte de tangență. Se aduc prin translație cele 4 optimi de sferă până ajung în contact, două câte două. Se cere vederea finală cu cele 4 corpuri simetrice și tangente între ele.

Fig.1





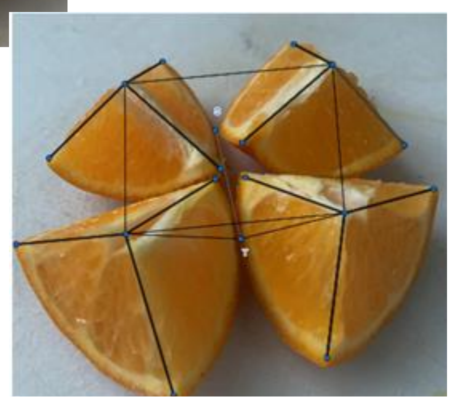


Fig.2

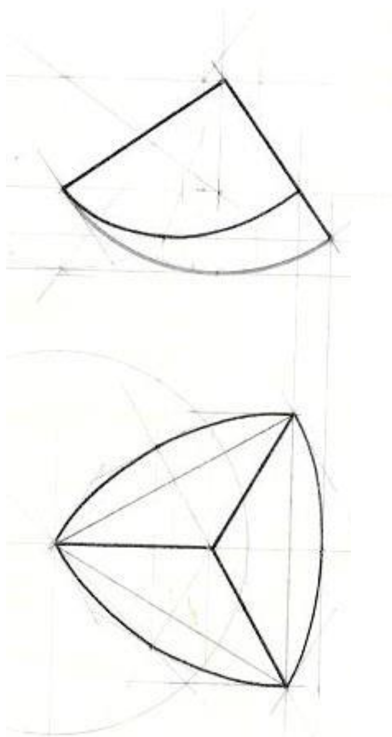
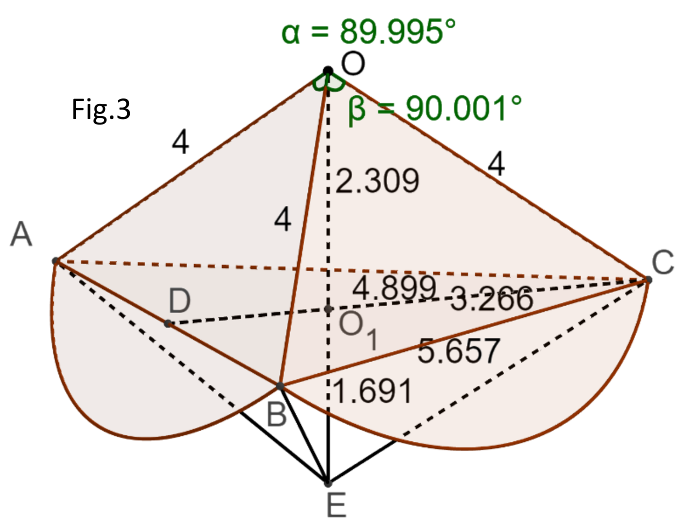


Fig.3



Presupunem problema rezolvată (se taie o portocală în 2, apoi în 4-figurile de început)

Construcția primei piramide-primul sfert de semisferă

Se consideră (Fig.3) tetraedrul OABC cu vârful O în centrul sferei și razele OA=OB=OC=4. Piramida OABC ne amintește de cubul din problema precedentă. Fețele laterale sunt triunghiuri dreptunghice isoscele și baza ABC este un triunghi echilateral cu latura AB=BC=AC=OA$\sqrt{2}$=5,657. Înălțimea CD=AB$\frac{\sqrt{3}}{2}$=4,899, deci raza cercului circumscris (CO_1)=$CD\,\frac{2}{3}$=3,266. Sa aflam înălțimea piramidei OO_1

Triunghiul OO_1C $\quad OO_1{}^2 = \mathrm{OC}^2 - OO_1{}^2$ obtinem $OO_1 = 2{,}309$ și $EO_1 = 4 - 2{,}309 = 1{,}691$

Am definit astfel un sfert din semisfera (1/8 din sferă) (Fig.1-5)

Fig.4

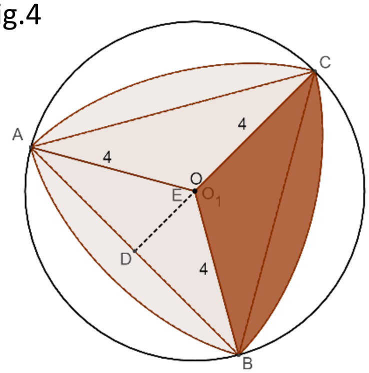
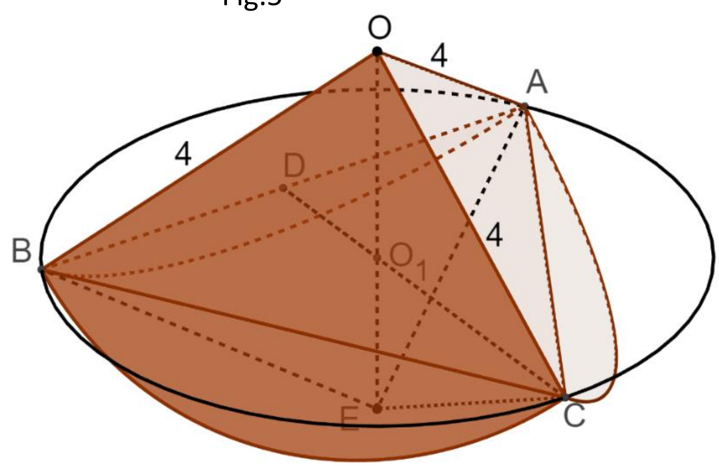


Fig.5



Mai departe

Se rotește cu 90° piramida OABC în jurul axei verticale (t) și avem piramida $O_1\ C\ B_1$ (Fig.6-7)

Fig.6

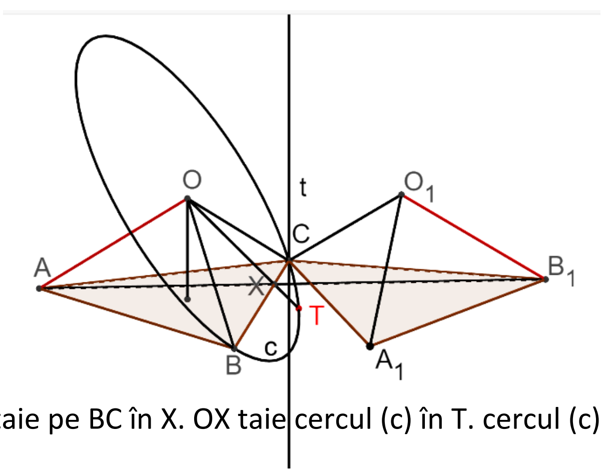
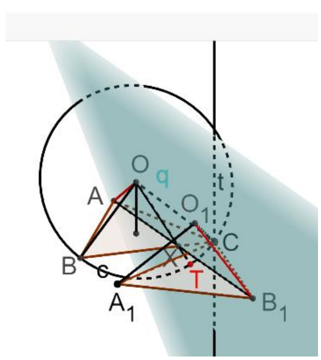


Fig.7

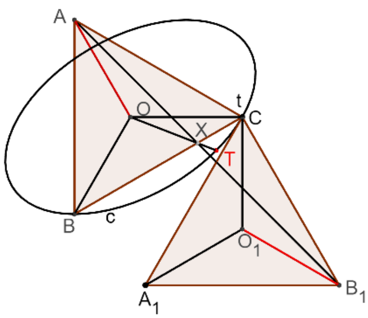


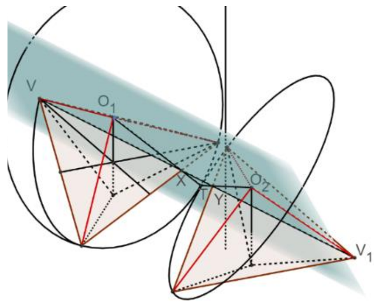
AB_1 taie pe BC în X. OX taie cercul (c) în T. cercul (c) are centrul în O și raza OB=OC=4

După rotație, planul albastru (q) cuprinde muchiile OA, și cea rotită O_1B_1 linia B_1A și punctele X,T

Fig.8 Fig.9

Fig.10





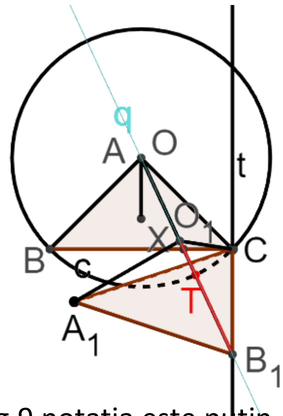


Fig.8-se vede rotația triunghiurilor de baza și punctele X,T. (Fig.9 notația este puțin diferită)

Fig.7-se vede planul (q) și punctele de intersecție X, T și muchiile AO, O_1B_1, B_1A pe aceeași dreapta (q)

Cercul (c) cu centrul O, se vede în adevărata mărime (Fig. 10 este văzută pe direcția perpendiculară pe fața OAB din Fig.8))

Se duce și cercul rotit (c_1) pe fața rotită O_1A_1C, cu centrul în O_1

Se văd punctele A, X,Y, B_1 coliniare Fig.3-4

Fig.12

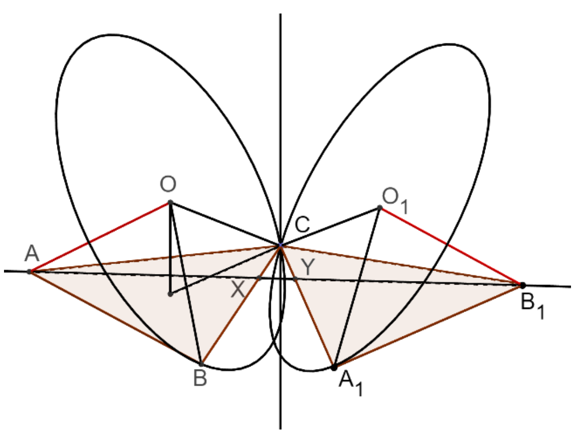
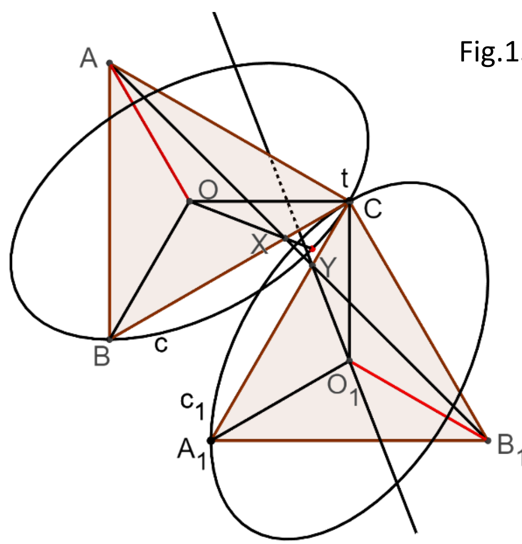


Fig.13



Pentru ușurință-figurile rotite sunt cu roșu (Fig.14)

Fig.14

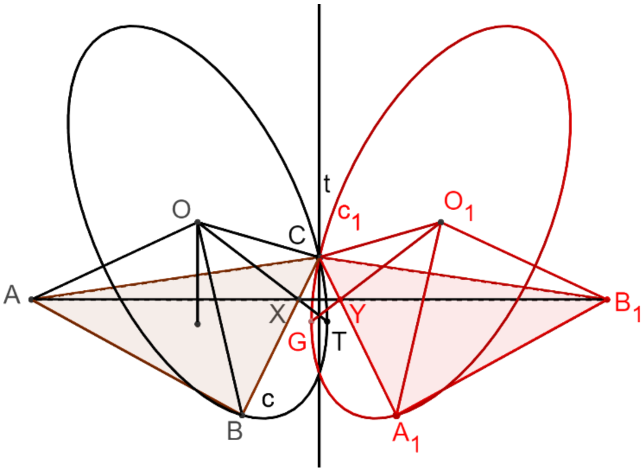
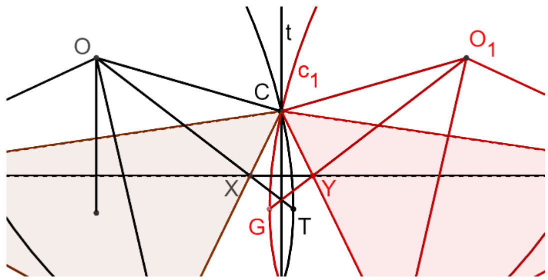


Fig.15



B_1A taie pe A_1C în Y și O_1Y taie cercul (c_1) în G, simetric cu T față de verticala (t)-Fig.14-15

Fig.16

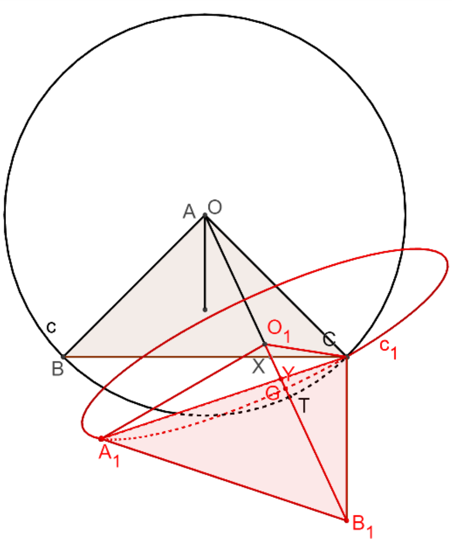


Fig.17

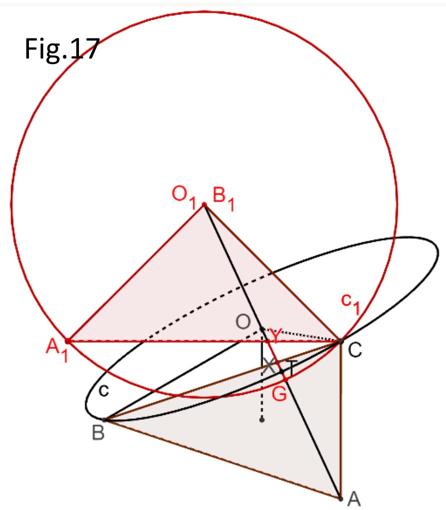


Fig.16-vedere normala pe direcția OA-cercul (c) se vede în adevărată mărime

Fig.17-vedere normala pe direcția O_1B_1-cercul (c_1) se vede în adevărată mărime

Fig.18

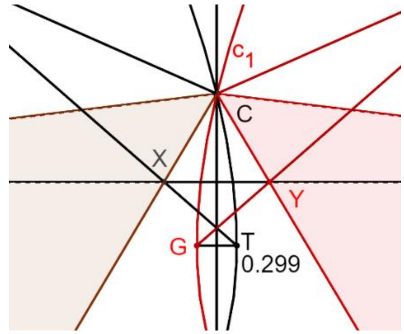


Fig.18 segmentul GT=0,299

Cercurile (c) și (c_1)sunt simetrice față de (t) cu $\frac{GT}{2} = 0{,}150$

Pentru rezolvarea finală, translatăm figura rotită cu GT

(GT=.299)

Fig.19

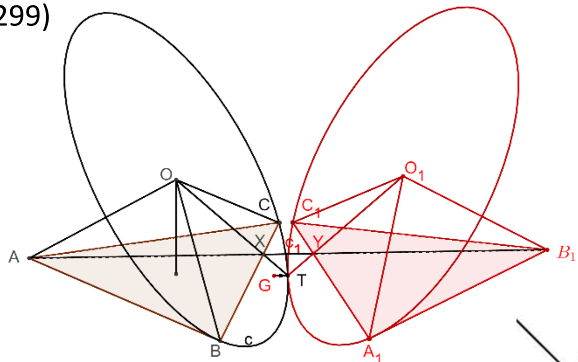


Fig.20

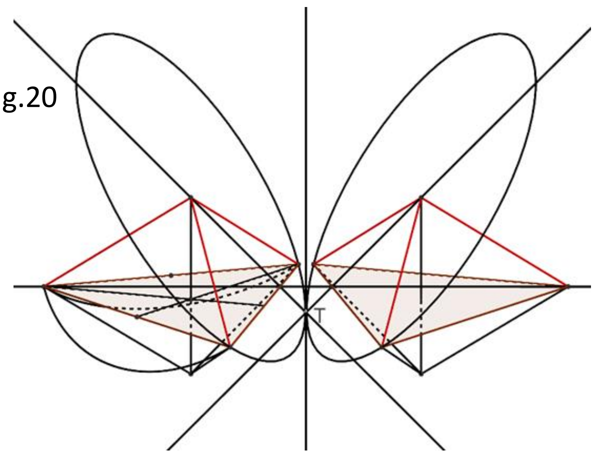
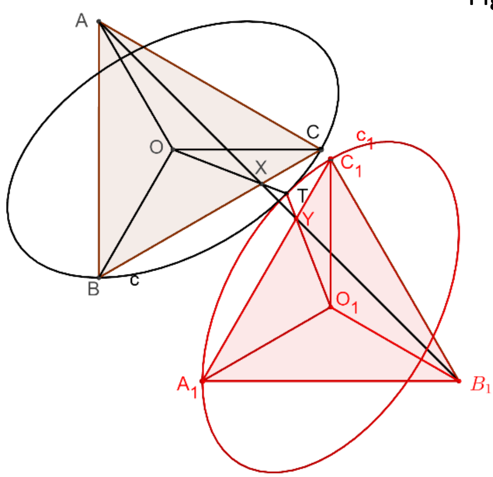


Fig.21



s-a obținut punctul de tangență T (G s-a translatat în T cu GT Fig.20-21)

Fig.22

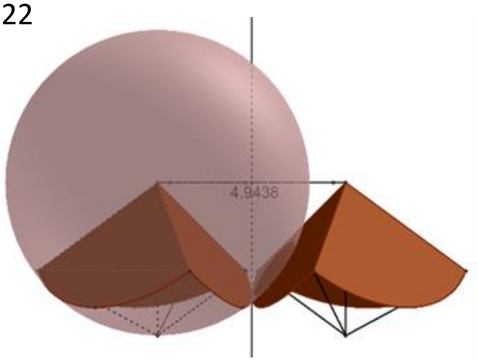
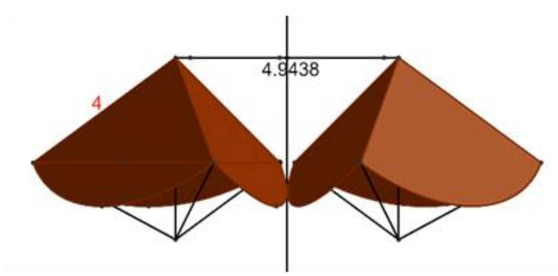
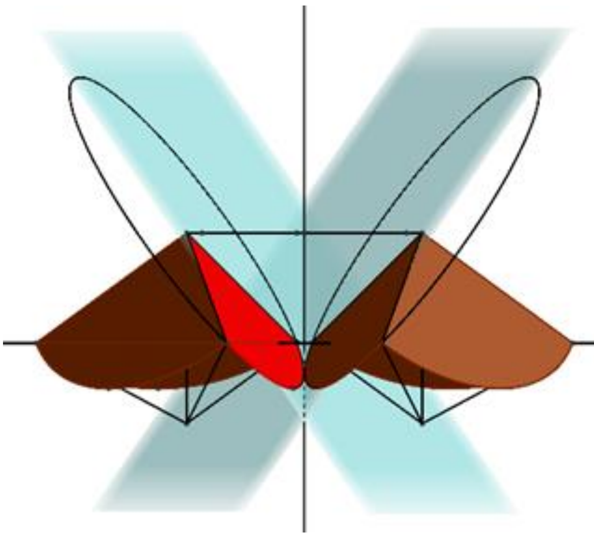


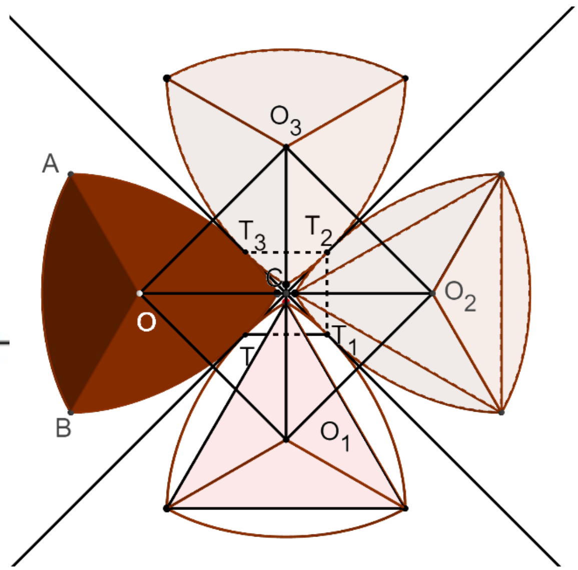
Fig.23



după ce am obținut cele 2 piramide cu cercurile tangente (Fig.20-21), construim sectoarele de cerc pentru cele 6 fețe (Fig.22), apoi prin simetrie cu planele verticale mediane obținem celelalte 2 corpuri simetrice și tangente 2 câte 2 (Fig.22-23).

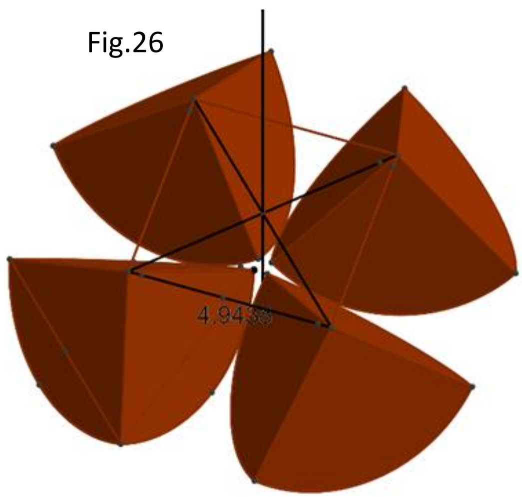
(Fig.24). (Fig.25)





Planele fețelor-albastre simetrice față de axa de simetrie (Fig.24)

Fig.25 Fig.26



Ajungem la construcția finală (Fig. 26) care ne duce la proiectul inițial (Fig.25)

Figurile de început (Fig.1-2) sunt realizate cu rigla și compasul, când eu aveam 16 ani și studiam geometria conicelor și afinitatea cerc-elipsă. Aceasta problemă frumoasă, a fost printre testele de admitere la Arhitectură-pe vremea comuniștilor, ca și *problema cubului* *mic, scos din cubul mare* (prezentată la Poliedrele regulate). Aceeași poveste, delicată și tristă, profesorii din comisia de examen, comuniști, pregăteau elevii preferați acasă și la examen, aceștia știau subiectele și intrau la Arhitectură. Vedem din nou corupția și nepotismul din societatea comunistă, care s-a extins acum și în lumea, așa zisa libera!

Am rezolvat problema fără computere, cu rigla și compasul, folosind afinitatea dintre cerc și elipsă (Fig.26)-problema rezolvată, acum 50 de ani, când eram elev în clasa 11.

Sa urmărim procedura geometrică, pas cu pas

-se construiește primul corp (stânga jos) cu metoda descrisă la început (Fig.2-3). Se obțin vârfurile A,B și centrul O (Fig.27).

-se duc dimetrii conjugați ai viitoarei elipse, AC și BD (din OA și OB). problema este să găsim punctul de tangență T, având dimetrii conjugați și o direcție dată (verticala t)

Fig.26

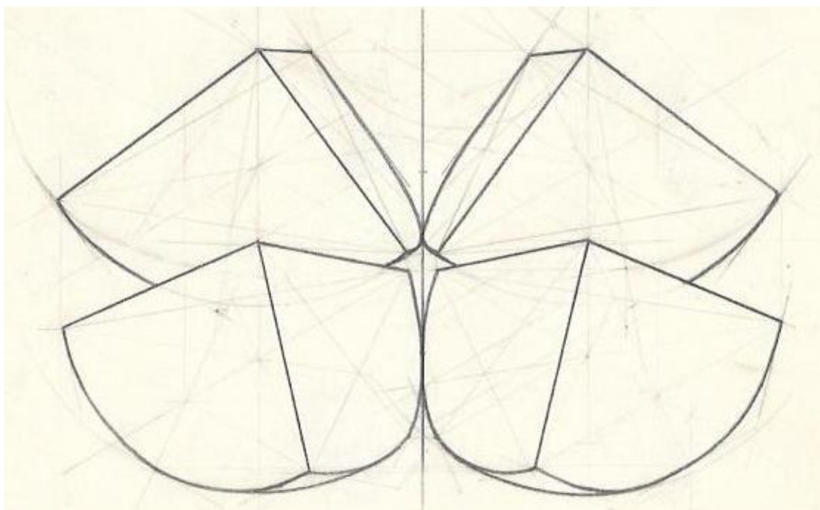


Fig.27

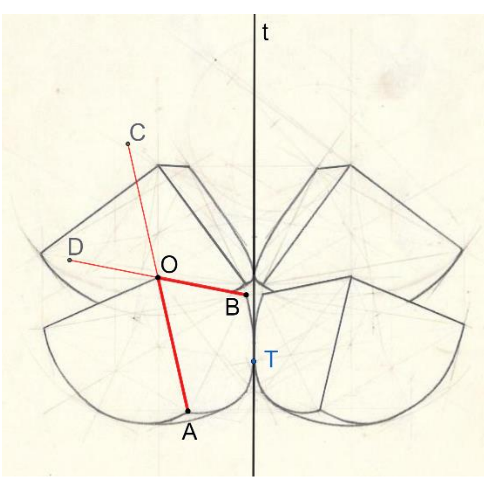
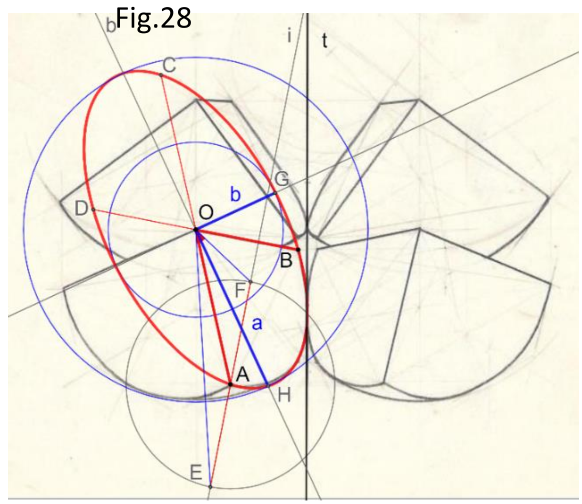


Fig.28



Problema se rezolvă prin **afinitate**

-se construiesc axele elipsei, cunoscând diametrii conjugați AC și BD

-se duce perpendiculara (c) din A pe BD și luăm AE=AF=OD=OB (avem E,F)

-se duce bisectoarea (b) a unghiului EOF și perpendiculara pe aceasta (c)

-(b) și (c) determină direcția axelor elipsei

-OH=a=$\frac{OE+OF}{2}$ = semiaxa mare OG=b=$\frac{OE-OF}{2}$=semiaxa mică

Având semiaxele (OH și OG) și direcțiile lor (b, c) se trasează elipsa cu diametrii conjugați AC,BD.

Aflarea punctului de tangență T

Fie o elipsă (e) dată prin semiaxele a=OA, b=OB și o direcție (t). să aflăm punctul de tangență dintre paralela la direcția (t) și elipsa (e).

-OA este axa de afinitate dintre elipsa și cercul afin (c). direcția (t) taie pe OA în S

-cercul afin (c) este cu centrul în O și raza OA

Fig.29

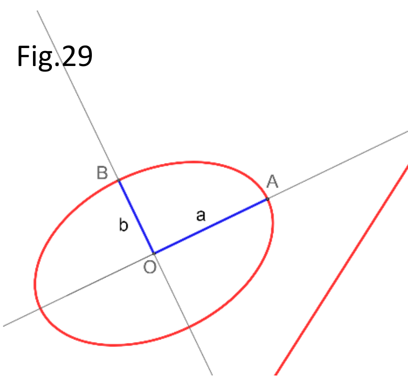
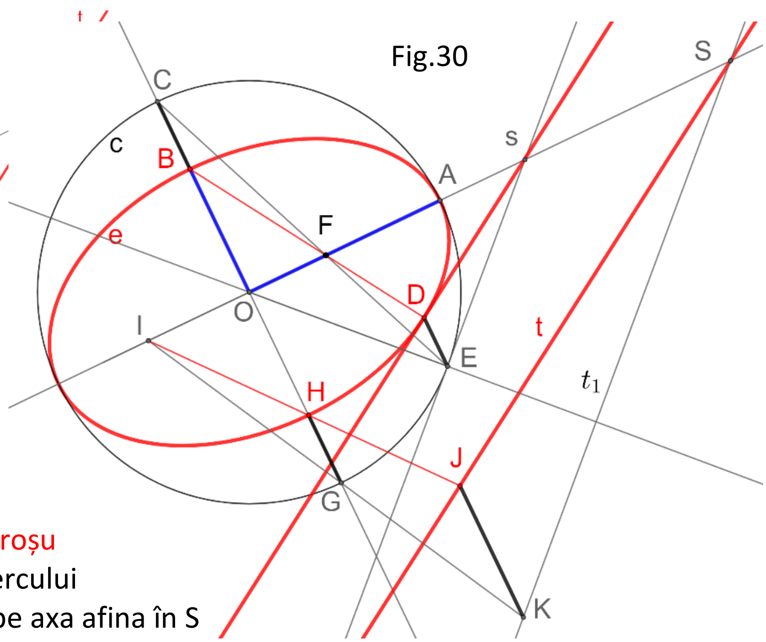


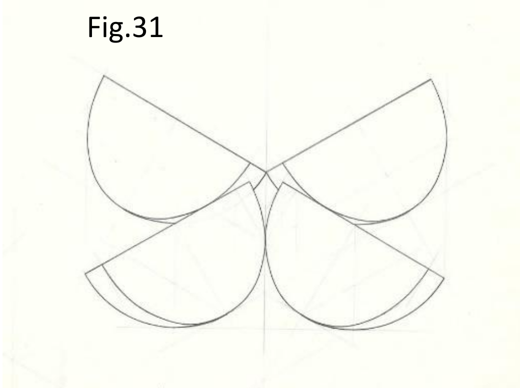
Fig.30



Elementele din planul elipsei-roșu
-se duce afina (t_1) în planul cercului
-JH și KG sunt afine și se taie pe axa afina în S
-se duce OE perpendicular pe (t_1), rezultă punctul E

-tangenta la cerc în E, taie axa afinității în s.
-se duce D în planul elipsei, afinul lui E în planul cercului (BD și CE sunt afine și se taie în s)
-rezultă sD tangenta la elipsa în punctul D.

Fig.31



Sa aplicam construcția pe elipsa (e)
avem diametrii BD și AC (Fig.33)
-direcția tangentei (t)
-semiaxele OH și OG
-axa afinității OS (axa mare)
-construim cercul afin (c)
-construim afina direcției (t)
-(t) taie axa afinității în S
-luam I pe OS
-GL și JK sunt afine și rezulta SK=(t_1)-afina direcției (t)
-se duce din O perpendiculara pe (t_1)-rezulta E pe cercul (c)
-se găsește afinul punctului de tangenta E-rezulta punctul T
ET și MN sunt afine, deci T este punctul căutat
T este punctul de tangenta dintre cele 2 elipse simetrice față de tangenta comună.
s-a verificat prin afinitate construcția făcută acum 50 de ani cu rigla și compasul, urmând același procedeu. Se continua cu simetria fața de planul de simetrie care trece prin T și avem corpul simetric din dreapta. Apoi se obțin și celelalte 2 corpuri și procedura se repetă- pentru găsirea punctelor de tangență.

Fig.32

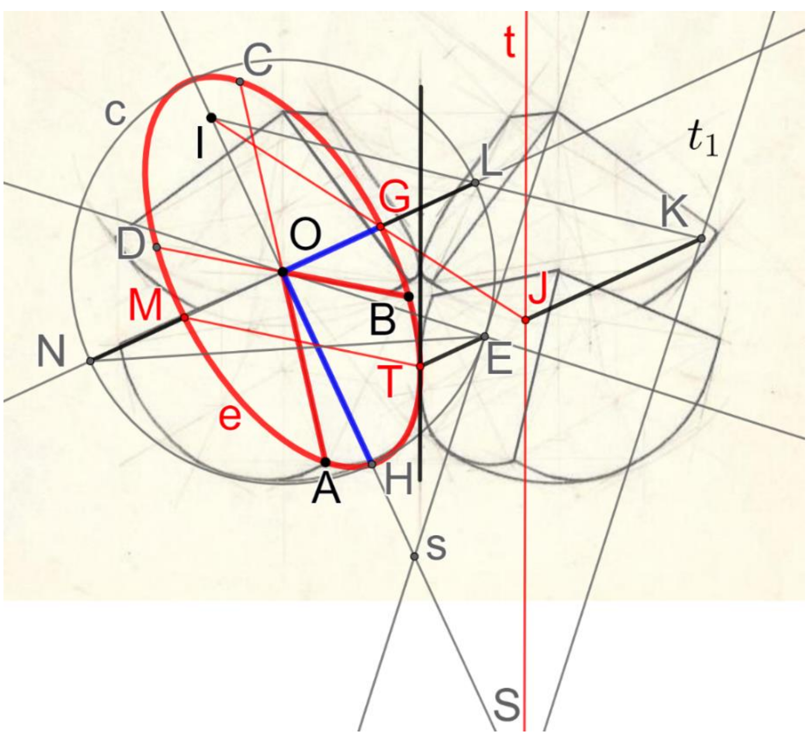
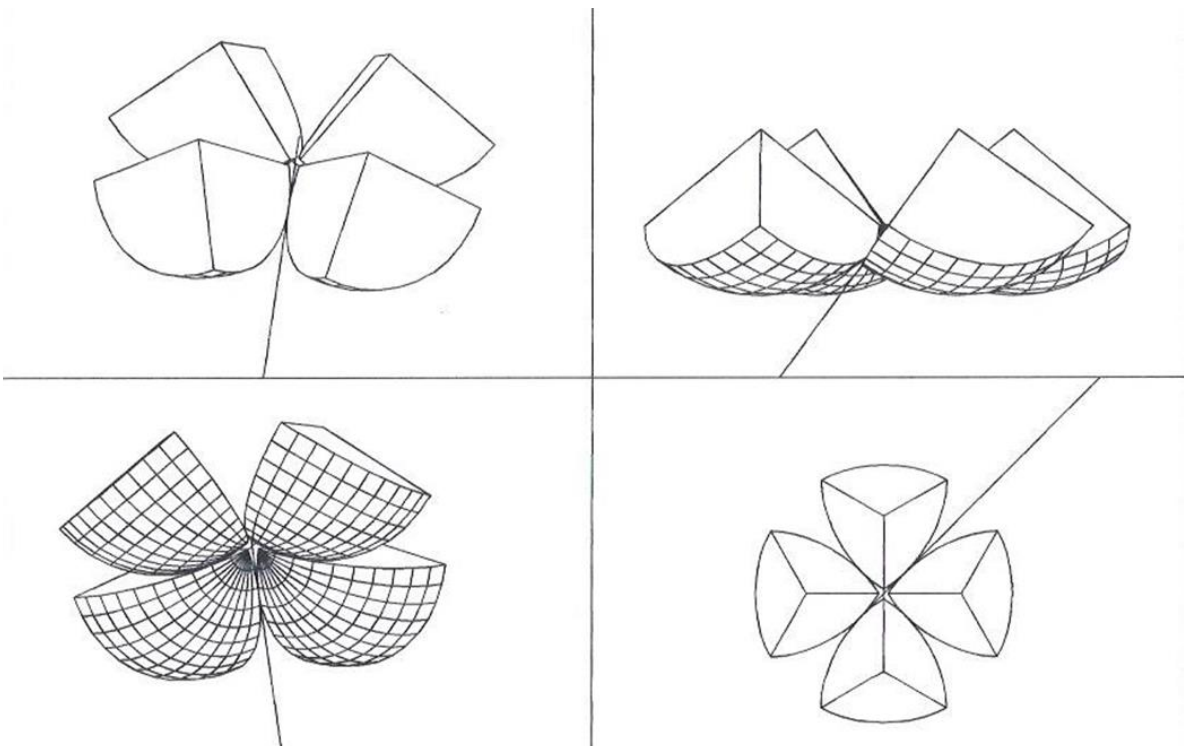


Fig.31 o altă vedere spațială, unde fețele sunt colinare și simetrice, ca diagonalele unui dreptunghi.

(realizată în 1976, când studiam geometria conicelor, pentru examenul de admitere la Arhitectură)

Iată o construcție realizată în 15 minute cu Solid Works



Programele evoluate CAD folosesc *algebra Bool*, și funcțiile puternice de unire, scădere și intersecție; la fel, problemele de tangență se rezolvă rapid și secțiunile prin corpuri sunt obținute imediat.

Am făcut o incursiune în timp, am readus geometria clasică, laborioasă, dar fascinantă și am ajuns la același rezultat uimitor prin mai multe procedee.

Larg în limba ebraică este *rahav* (Strong# 7337). Apare și în istoria lui Iosua, când a cucerit Ierihonul (Iosua 2.1), când curva Rahav a ascuns iscoadele trimise de Iosua și și-a lărgit inima, căci a ajutat la cucerirea cetății întărite-Ierihonul. Sa revenim la cub.

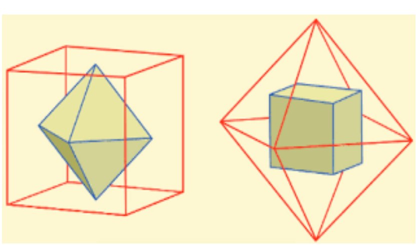
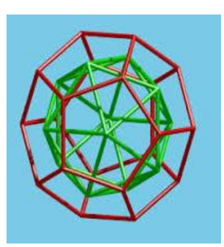
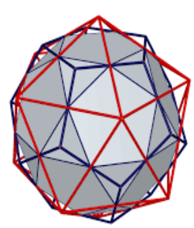
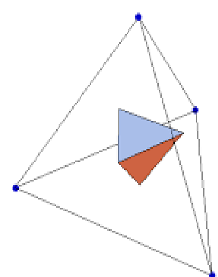
În Apocalipsa 20,9 apare ca fața *largă* a pământului, iar în Apoc. 21,16 apare de 2 ori ca dimensiunea Templului nou, cetatea sfântă, *Noul Ierusalim*. Aici, cele 3 dimensiuni ale cetății sunt egale*: Cetatea era în 4 colțuri, și lungimea era cât lărgimea. A măsurat cetatea* *cu trestia și a găsit aproape 12000 de prăjini.* ***lungimea, lărgimea*** *și* ***înălțimea*** *erau deopotrivă.* Aici apare cubul în construcția cetății sfinte. Cortul lui Moise dar și Templul lui Solomon aveau dimensiunile unei prisme, care respectau proporția 1/3, aproape de numărul de aur-treimea. Vedem ca ultima cetate din veșnicie-*Noul Ierusalim* este de forma unui cub, cu laturile egale. Cubul este simplu și miraculos, așa cum am văzut, pe el se construiesc cele 5 solide platonice descrise mai sus. Creșterea uniformă-egală pe cele 3 direcții, arată armonia divină, la care și noi suntem chemați, ca și credincioșii Domnului.

Această creștere armonioasă am văzut-o și la spirala logaritmică-*spira mirabilis*, descoperită de Descartes. Jokob Bernoulli a gravat-o pe mormânt și a pus citatul *celebru Eadem, mutato resurgo* (deși schimbat mă ridic la fel). Am văzut la studiul spiralei, ca soția și copii lui aveau nădejdea revederii la Răpirea Bisericii, conform Bibliei, care vorbește despre învierea morților (1 Cor.15,51-52/1 Tes. 4,15).

În Ezechiel 41, 42 se descrie un Templu, viitor, care va fi construit în Împărăția mileniului, după răpirea Bisericii. Vedem la fel, același **cub**, cu ...*cele 4 laturi de jurul împrejurul casei. Lungimea era de 500 de prăjini și lățimea de 500 de prăjini*. (Ez. 42,20)

S-ar putea merge mai departe cu cele 3 laturi ale cubului-s-ar putea sa comparam armonia cubului cu Trinitatea divina, sau sa admitem ca și grecii, sau savanții din Renaștere, ca Dumnezeu guvernează și construiește planetele după raportul de aur. Sunt gânduri prea îndrăznețe, care Îl limitează pe Creatorul Universului. Vom vedea în istoria poliedrelor, cum savanții le-au atribuit trăsături divine, chiar și Kepler, care a descoperit legea mișcării planetelor, a căzut în aceasta aventură. Vom vedea cum mai târziu, Newton a calculat, cu legea atracției universale, razele și spatiile interplanetare.

Dualitatea celor 5 poliedre

Cubul și octaedrul/dodecaedrul și icosaedrul sunt duale-reciproc, iar tetraedrul este dual cu el însuși (daca se unesc centrele fețelor se obțin alte solide diferite-excepția tetraedrul) Dualismul este util în geometria de mai sus, căci daca ai unul, unești centrele fețelor și obții dualul, fără alte construcții și calcule. Din cubul mare-roșu (latura =8), s-au obținut dodecaedrul (latura=3,056) și icosaedrul (latura 4,944). Am văzut ca aceste doua nu se pot înscrie în aceeași sferă. Două solide duale, nu se pot înscrie în aceeași sfera (unul este mai mic decât altul)

Acest principiu-geometric se extinde și în sfera spirituala. Biblia spune ca nu poți servi la 2 stăpâni. Am văzut mai sus geometria corpurilor duale. Ele nu pot intra în aceeași sfera. Deși din cubul mare-roșu cu latura=8, au ieșit și icosaedrul și dodecaedrul, cele 2 nu se înscriu în aceeași sfera. Ca sa intre în sfera, a fost necesara ruperea raportului de aur

$$\frac{l_{icos}}{l_{dod}}=\frac{4,944}{3,056}=\frac{8}{4,944}=\emptyset$$

s-a făcut o reducție a cubului mare cu 9,8% a laturii cubului de pornire (de la 8 la 7,825)

Biblia spune în Matei 6,24: *Nimeni nu poate servi la doi stăpâni. Caci sau va urî pe unul și va iubi pe celălalt, sau va ținea la unul și va nesocoti pe celălalt. Nu puteți sluji lui Dumnezeu și lui Mamona.*

Dualismul, sau ecumenismul, amestecarea aspirațiilor, a stăpânilor, dar și a credinței adevărate, sunt nefericite și contrazic adevărului din Scripturi.

Yin-Yang (alb-negru) și Poarta Sărutului de Brâncuși, arata dualismul periculos. Poți privi pe poarta 2 semicercuri, care se unesc într-un sărut (iubita-iubit), dar marele artist a dorit să arate sărutul lui Isus cu Iuda, la fel ca simbolurile chinezești.

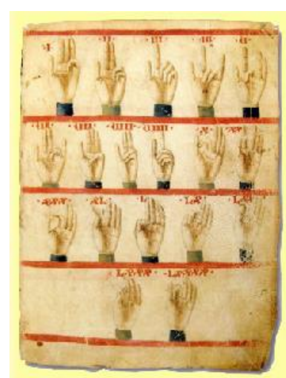
Din adevăr (alb) nu poate ieși minciuna, dar și reciproc este adevărat. În viața -omului pierdut se produce o schimbare, el este transformat, prin credința în jertfa Domnului, la Calvar, trece din starea de păcat-negru în alb (copil al lui Dumnezeu), se produce miracolul numit în Biblie nașterea din nou (Ioan 3,3-7).

Istoria poliedrelor

(Euclid și Școala din Atena de Rafael, unde Bramante pozează ca Euclid-Palatul Vatican)

Euclid
(325–265 BC)

Deși se numesc *platonic-solides,* nu există indicii prin care Plato (428-348 BC) le-ar fi folosit pe toate 5. La el nu apare dodecaedrul. Plato l-a avut student pe Aristotel (384-322). După multe evidențe, se pare că Euclid a fost printre primii care a studiat și a construit poliedrele regulate. El le-a definit în cartea sa celebra Elementele. După el au venit alți matematicieni celebri care au preluat cunoștințele sale. Arhimede (287-212 BC), Heron din Alexandria (62 AD), **Pappus** (290-350 AD) apoi arabii, care-au preluat scrierile grecilor-după ce a ars Biblioteca din Alexandria (642 AD), au dus mai departe aceste cunoștințe matematice.

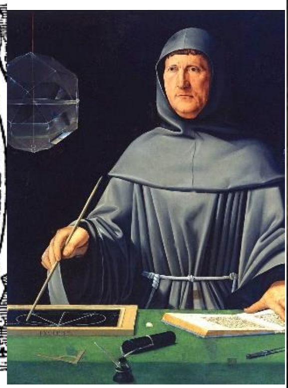


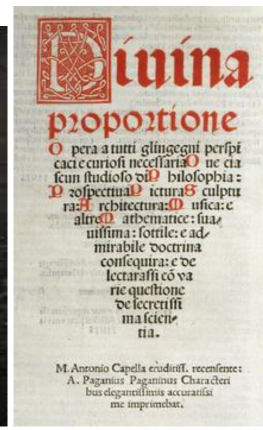
Pappus și Fibonacci, cu o pagina din *Liber Abaci*-unde el a promovat cifrele arabe în Europa

După dark ege -evul mediu (1000 de ani), știința revine în Europa și italienii sunt primii care o promovează. **Fibonacci** (1170-1240-1250), ca și Pappus, descrie în cartea Practica Geometriae, modul de calcul al volumelor și construiește grafic cele 2 solide duale (Dodecaedrul și icosaedrul).

Leonardo Pisano-Fibonacci a fost trimis de tatăl sau Bonaccio (negustor, a fost numit consul asupra comunității de comercianți din Pisa, în portul nord-african Bugia -acum Bejaïa, Algeria) să studieze matematica cu un maestru arab. Mai târziu a mers în Egipt, Siria, Grecia, Sicilia și Provence, unde a studiat diferite sisteme numerice și metode de calcul. S-a ocupat de ecuațiile diofantice, a introdus secvența -seria Fibonacci, care leagă seriile numerice de construcțiile geometrice ale numărului de aur și obține progresia celebra 1,1,2,3,5,8,13,21 ...unde $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ și $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$=Ø=1,618

Piero della Francesca (1415-1492) Luca Pacioli (1445-1514) Leonardo da Vinci (1452-1519)


Diuina
proportione
Opera a tutti glingegni perſpicaci e curioſi neceſſaria Oue ciaſcun ſtudioſo di Philoſophia: Proſpectiua Pictura Sculptura: Architectura: Muſica: e altre Mathematice: ſuauiſſima: ſottile: e admirabile doctrina conſequira: e delectaraſſi cō uarie queſtione de ſecretiſſima ſcientia.

M. Antonio Capella eruditiſſ. recenſente: A. Paganius Paganinus Characteribus elegantiſſimis accuratiſſime imprimebat.

Piero della Francesca s-a născut în orașul Borgo Santo Sepolcro, Toscana modernă. Tatal Piero di Benedetto era un negustor prosper, și mama sa Romana di Perino da Monterchi, era descendentă a familiei nobiliare florentine și toscane Franceschi. Tatăl său a murit înainte de nașterea lui Piero, iar el a fost numit Piero della Francesca după mama sa, care era numită „la Francesca” din cauza căsătoriei ei cu familia Franceschi.

Piero a fost un pictor celebru, înaintea titanilor Michelangelo, Rafael și Leonardo. A pictat și în Florența unde i-a întâlnit pe Fra Angelico, Luca della Robbia, Donatello și Brunelleschi. A fost chemat și la Roma unde sub comisionul papei a pictat câteva lucrări-fresco, la Vatican, care s-au distrus. Unele fresce au rămas în bazilica Santa Maria Maggiore, din Roma. În ultimii ani, Perugino și Luca Signorelli i-au vizitat atelierul. La Urbino i-a întâlnit pe Luca Pacioli și pe Leon Batista Alberti, celebru om de cultura, poet, arhitect și filozof.

Interesul profund al lui Piero pentru studiul teoretic al perspectivei și abordarea contemplativă a picturilor, sale sunt evidente în toată opera sa. În tinerețe, Piero a fost instruit în matematică, ceea ce cel mai probabil a fost pentru a face negustorie.

Trei tratate scrise de Piero au supraviețuit până în zilele noastre: Trattato d'Abaco (Tratat de algebra), De quinque corporibus regularibus (Despre cele cinci solide regulate) și De Prospectiva pingendi (Despre perspectiva în pictură).

(2)

(1)

(3)

Madona di Brera (Pinacoteca-Milano)-(1) Botezul lui Isus-National Gallery-London (2) Fecioara cu Pruncul întronat-Clark Institute-Massachussets (3)

Picturile lui Piero sunt diverse, de la scene biblice la portrete și clădiri cu perspective precis desenate. Deși în umbra marilor maeștri, el uimește prin diversitate, prin forță și simplitatea expresiei, dar mai ales prin tehnica deosebită, îmbinată cu matematica și arhitectura. Cunoștințele lui vaste, îl prezinta ca un învățat de talia lui Leonardo, pe care-l depășește în cunoștințele matematicii. Faptul ca el l-a studiat pe Arhimede și a construit conice și solidele lui Platon, ne arata vasta sa cultura, bogata, diversă, excepțională.

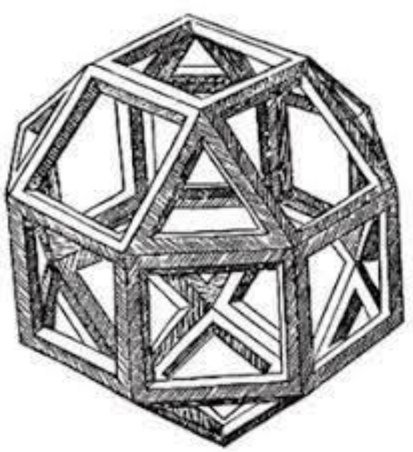
Subiectele abordate în scrierile sale includ aritmetică, algebră, geometrie și lucrări inovatoare atât în geometria în spațiu, cât și în perspectivă. O mare parte din munca lui Piero a fost mai târziu absorbită în scrierile altora, în special al Luca Pacioli, care i-a copiat lucrările.. Lucrarea lui Piero despre geometria solidelor a fost tradusă în *Divina proportione* a lui Pacioli, o lucrare ilustrată de Leonardo da Vinci. Biografii patronului său, Federico da Montefeltro din Urbino (ducele) susțin că a fost încurajat să urmărească interesul în perspectivă, care era împărtășit de duce. La sfârșitul anilor 1450, Piero a copiat și ilustrat următoarele lucrări ale lui Arhimede: Despre sferă și cilindru, Măsurarea unui cerc, Despre conoide și sferoide, Despre spirale, Despre echilibrul planurilor, Quadratura parabolei.

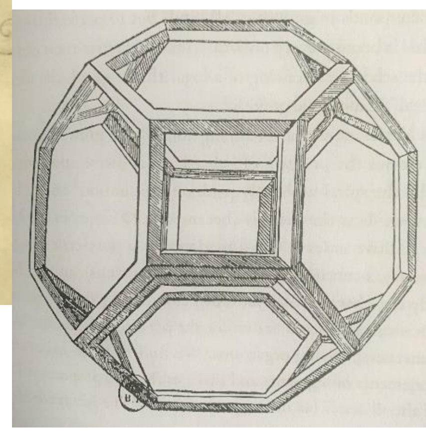
Luca Pacioli a fost un călugăr franciscan, născut în Sansepolcro-provincia Arezzo-Toscana. A fost pasionat de finanțe și matematici și a dat lecții private la diferiți copii de nobili și negustori.

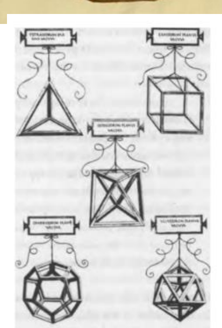
În 1494, prima sa carte, Summa de arithmetica, geometria, Proportioni et proportionalita, a fost publicată la Veneția. În 1497, a acceptat o invitație din partea ducelui Ludovico Sforza de a lucra la Milano. Acolo l-a cunoscut, a predat matematica, a colaborat și a trăit cu Leonardo da Vinci. În 1499, Pacioli și Leonardo au fost forțați să fugă din Milano când Ludovic al XII-lea al Franței a pus mâna pe oraș și-a alungat pe conducători și pe guvernanți.. Căile lor par să se fi despărțit în cele din urmă în jurul anului 1506.

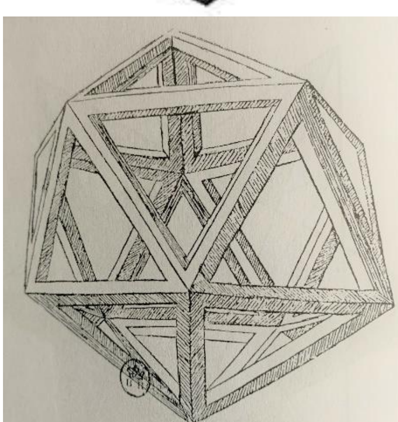
Proportioni et proportionalita (a doua ediție) a fost o versiune rescrisă a uneia dintre lucrările lui Piero della Francesca. Al treilea volum din **Divina proportione** (Veneția, 1509)a lui Pacioli a fost o traducere în italiană a cărții în latină a lui Piero della Francesca De quinque corporibus regularibus (Cele 5 corpuri regulate). În niciunul dintre cazuri, Pacioli nu a inclus contribuția lui Piero. El a fost aspru criticat pentru acest lucru și acuzat de plagiat de către istoricul de artă și biograful din secolul al XVI-lea Giorgio Vasari.

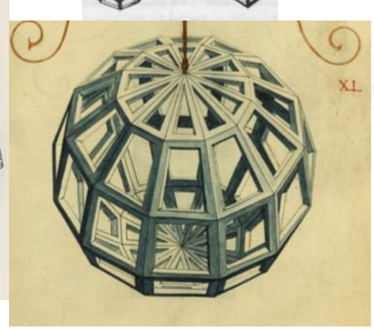
Leonardo a desenat pentru Pacioli și astfel au reușit o capodopera, care a rămas un simbol al studiilor de estetica și proporții până în ziua de astăzi.

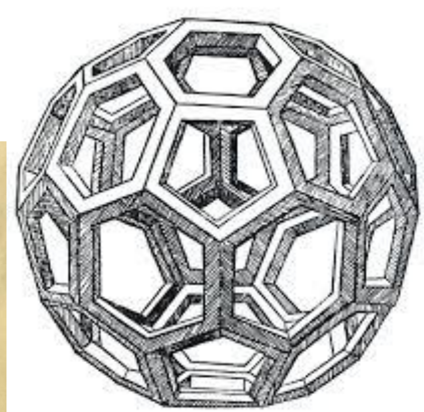












Iată cuvintele de admirație și de început, ale autorului-Pacioli, către ducele **Ludovico Sforza**, (1452-1508), din Milano, protectorul artelor și culturii.

***Excelent duce**, mi se pare că titlul potrivit pentru acest tratat trebuie să fie Proporția divină. Acest lucru se datorează faptului că există foarte multe atribute similare pe care le găsesc în proporția noastră, toate potrivite lui Dumnezeu însuși, care este subiectul discursului nostru foarte util. Dintre cele multe, voi lua patru ca fiind suficiente pentru scopul nostru.*

Primul *este că este unul singur și nu mai mult. Și nu este posibil să-i acordăm specii diferite, nici diferențe. Această unitate, conform tuturor școlilor teologice și filozofice, este epitetul suprem al lui Dumnezeu însuși.*

Al doilea *atribut este cel al Sfintei Treimi. Adică, așa cum în divin există trei persoane în aceeași substanță: Tatăl, Fiul și Duhul Sfânt, „una și același" proporție de acest fel implică întotdeauna trei termeni și niciodată nu este nevoie de mai mult, nici mai puțin pentru a o găsi, așa cum vom vedea mai târziu.*

Al treilea *atribut este că, la fel cum Dumnezeu nu poate fi definit în mod corespunzător și nici nu poate fi înțeles prin cuvinte, la fel și această proporție a noastră nu poate fi desemnată niciodată prin numere inteligibile și nici nu poate fi exprimată prin nicio cantitate rațională, ci rămâne întotdeauna ocultă și secretă și este numită de matematicieni irațională.*

Al patrulea *atribut este că, la fel cum Dumnezeu nu se poate schimba niciodată și este totul în toate și totul pretutindeni, la fel proporția noastră actuală este întotdeauna în orice cantitate, fie ea mare sau mică, este una și întotdeauna invariabilă și nu există nicio cale ca aceasta să poată fi schimbată și nici nu poate fi învățată altfel de intelectul nostru, așa cum va arăta discuția noastră.*

Un al cincilea *atribut poate fi adăugat pe deplin la cele de mai sus. Aceasta este: așa cum Dumnezeu a transmis ființa virtuții cerești printr-un alt nume, numită a cincea esență și prin ea celorlalte patru corpuri simple, (adică cele patru elemente: pământ, apă, aer și foc) și prin acestea El a conferit ființa oricărui alt lucru din natură, de asemenea, această proporție sfântă a noastră dă ființa formală, (conform bătrânului Platon către Timaeus) cerului însuși, conferindu-i figura corpului numit Dodecaedru sau corpul cu douăsprezece pentagoane, care, după cum se va arăta mai jos, este imposibil de format fără proporția noastră. Și, în mod similar, atribuie, proporție sau Dumnezeu, fiecăruia dintre celelalte* *elemente, propria formă specifică, corpuri deloc asemănătoare între ele: adică să ardă figura piramidală numită **tetraedru**; pământ figura cubică numită Hexaedru; la aer, figura numită **Octaedru**; iar la apă, pe cel numit **Icosaedru**. Aceste forme și figuri sunt toate numite de înțelepți corpuri regulate, deoarece vor fi tratate individual mai jos. Fără proporția noastră nu este posibil să le comparăm între ele și nici nu pot fi înscrise într-o sferă; toate acestea vor apărea mai jos. Fie ca aceste caracteristici să fie suficiente pentru introducerea prezentului compendiu, deși multe altele ar putea fi menționate.*

Cu privire la Numirea sa demnă (titlul lucrării) (Capitolul VI)

***Excelent Duce**, această proporție a noastră este de o asemenea calitate și de o excelență demnă cât s-ar putea spune vreodată, din cauza puterii sale infinite; încât fără cunoștința ei foarte multe lucruri demne de admirat nu ar fi putut ieși la iveală în orice altă știință. Acest dar i-a fost acordat prin natura invariabilă a principiilor superioare, așa cum a spus faimosul nostru matematician și marele filosof Campanus despre cap. 10 din 14 [cartea lui Euclid]. Mai ales când se vede că este ceea ce reunește, cu o anumită simfonie irațională, corpuri atât de diverse în dimensiuni, multitudini de suprafețe și forme. După cum va fi înțeles în continuarea noastră, prin scoaterea la iveală a efectelor uimitoare, care nu trebuie să fie numite naturale, ci cu adevărat divine.*

concluzii

1. „Este unul singur și nu mai mult”. Pacioli compară valoarea unica a Raportului de Aur cu faptul că *unitatea* este trăsătura supremă a Dumnezeirii.

2. Pacioli găsește o asemănare între faptul că definiția Raportului de Aur implică exact trei lungimi (AC, CB și AB) și existența unei Sfinte Treimi, a Tatălui, Fiul și Duhul Sfânt.

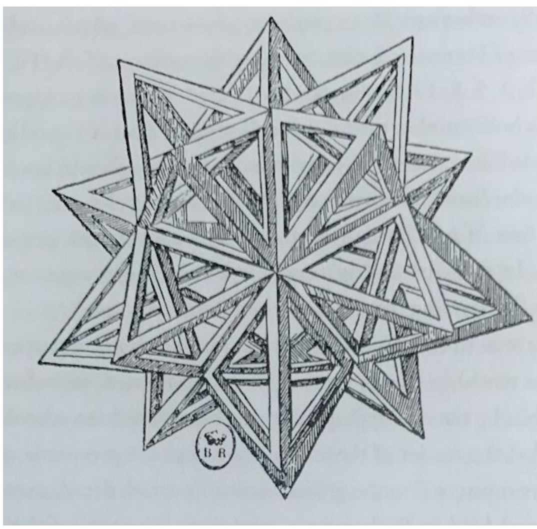
3. Lui Pacioli, faptul ca Dumnezeu este nemărginit și de nepătruns și faptul că Raportul de aur este un număr irațional sunt echivalente

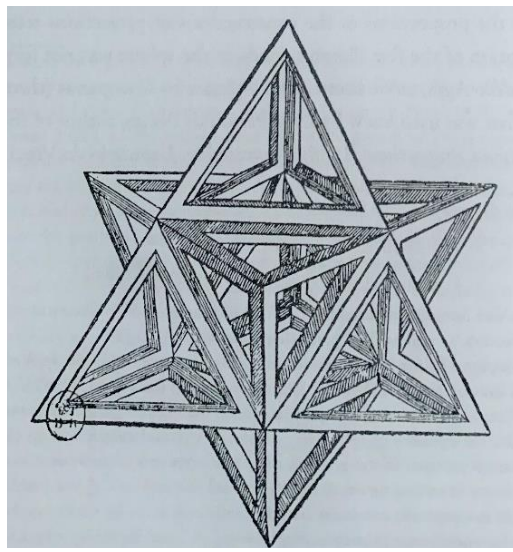
4. Pacioli compară omniprezența și invariabilitatea lui Dumnezeu cu Raportul de Aur, care are valoarea întotdeauna aceeași și nu depinde de lungimea liniei care se împarte sau de dimensiunea pentagonului în care rapoartele de lungimi sunt calculate.

5. Al cincilea motiv dezvăluie o viziune și mai platonică asupra existenței decât a exprimat însuși Platon. Pacioli afirmă că, așa cum Dumnezeu a creat întregul cosmos prin cea de-a cincea esență, reprezentată de dodecaedru, tot așa este Raportul de Aur la dodecaedru, deoarece nu se poate construi dodecaedru fără Raportul de Aur. El adaugă că este imposibilă comparația celorlalte patru solide platonice (reprezentând pământ, apă, aer și foc) unul față de celălalt fără Raportul de Aur.

Din prefața lui Pacioli rezulta admirația supremă, dusă la extrem-misticism, asupra proporției de aur, pe care o aseamănă cu trăsăturile divine. Desigur, căzut în extaz, fără sa pătrundă îndeajuns toate trăsăturile geometrice ale celor 5 corpuri, Pacioli exagerează. El preia conceptele vechi și păgâne, inventate de greci-Pitagora și Platon, prin care solidele platonice erau asemenea focului, apei, pământului și aerului (dodecaedrul era culmea creației-, adică Universul). Aceste afirmații-exagerate au fost preluate și de alți gânditori, care au urmat, Johannes Kepler și Galilei. În adevăr, pentagonul, numărul 5 și apoi cele 5 corpuri se leagă intre ele prin proporția de aur, pe care am studiat-o separat în detaliu. Fără numărul de aur nu avem pentagon și dispar doua din cele mai desăvârșite corpuri icosaedrul și dodecaedrul. După cum am văzut în studiul nostru, cubul le ține pe toate 5, pe structura lui ascunsă, se construiesc pe rând celelalte 4, care sunt duale două cate două (cubul cu octaedrul și ultimele două).

Alte desene de Leonardo în Divina Proportione





Iată ce afirma Giorgio Vasari despre cartea lui Pacioli, care a tradus opera lui Piero, fără sa-i menționeze numele (deși a fost elevul lui Piero!)

(Piero...).....*a fost considerat un mare maestru al problemelor solidelor regulate, atât aritmetice cât și geometrice, dar a fost împiedicat de orbire, care l-a cuprins la bătrânețe, iar apoi prin moarte, făcând necunoscute strălucitele sale cercetări și numeroasele cărți pe care le-a scris. Omul care ar fi trebuit să facă tot posibilul pentru a spori reputația și faima lui Piero* (adică Pacioli n.a.), *deoarece Piero l-a învățat tot ce știa, a încercat cu rușine și răutate să șteargă numele profesorului său și să uzurpe pentru sine cinstea care i-a aparținut în întregime lui Piero; pentru că a publicat sub nume propriu, care era Fra Luca dal Borgo (Pacioli n.a.), toate cercetările făcute de acel admirabil bătrân, care a fost un mare pictor, precum și un expert în științe....* (au rămas necunoscute n.a.)

Aceste dispute (de plagiaturi), de acum 5 secole nu sunt singure în istorie...la fel L´ Hospital i-a luat faima lui Johann Bernoulli și câți alții au profitat de munca altora...

Un alt personaj celebru în Renașterea europeana vine din Germania, de unde reforma lui Luther s-a aprins ca o făclie în toata Europa nordica. Este marele gravor și pictor **Albrecht Dürer** (1471-1528), prieten și adept a lui Luther, poate cel mai de seamă artist german.

autoportrete (1493)

la 13 ani (1484-Albertina -Viena) (1491)

(1493-Louvre-Paris) (la 26 ani-Prado-Madrid)

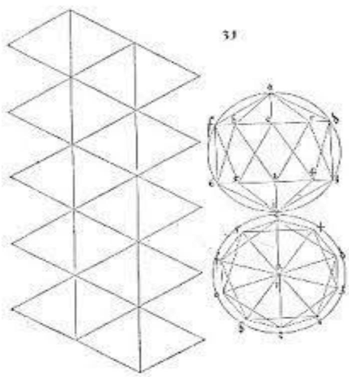
Dürer s-a născut la 21 mai 1471, în Orașul Imperial Nuernberg, fiul unui bijutier harnic. La nouăsprezece ani, el deja a demonstrat talente și abilități ca pictor și desenator de gravură în lemn care le-a depășit pe cele ale profesorului său, pictor și ilustrator de carte de frunte din Nuernberg, *Michael Wolgemut.*

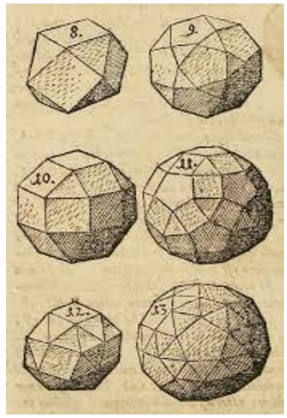
Dürer s-a hotarât sa plece prin Europa, ca sa învețe arta și știința. Astfel intre 1490-1494 (Wanderjahre), a călătorit prin Frankfurt, Basel, Strassbourg și Colmar (Franta). Revine la Nuernberg, unde se căsătorește cu Agnes Frey, fiica unui meșter bogat.

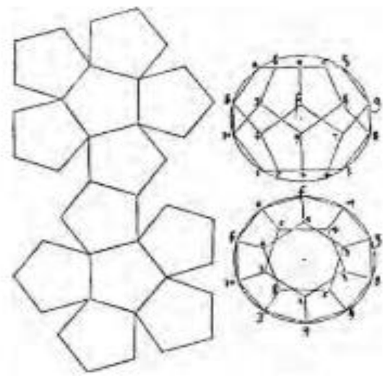
Pleacă în Italia (1494-1495)-țara artelor, fiind convins că matematica, „cea mai precisă, logică și mai constructivă din punct de vedere grafic dintre științe”, trebuie să fie un domeniu important al artei. Vizita sa la Veneția, ii aduce ceea ce el aștepta. Întâlnirea lui Dürer cu fondatorul Școlii Venețiene de pictură, *Giovanni Bellini* (1437-1516), a lăsat o adâncă impresie asupra tânărului artist, iar admirația lui pentru Bellini a persistat pe tot parcursul vieții lui. Aici îl întâlnește pe *Jacopo de' Barbari*, care a pictat minunatul portret al lui Luca Pacioli, a cunoscut lucrarea matematică a lui Pacioli și pasiunea acestuia pentru artă. De la Barbari, Dürer învață metoda proporțiilor la corpul uman, care au fost construite prin metode geometrice. Apoi a plecat din nou la Italia (1505-1507), cu scopul de a-și largi orizonturile artistice și matematice. Dürer s-a întâlnit probabil cu Pacioli însuși, la Bologna. Într-o scrisoare din acea perioadă, el își descrie vizita la Bologna ca fiind „de dragul artei, căci există *unul* acolo care mă va instrui în arta secretă a perspectivei.” Misteriosul „unul” din Bologna a fost interpretat de mulți ca referindu-se la Pacioli.

Începând cu 1495, Dürer a arătat un interes mare pentru matematică. A petrecut mult timp studiind *Elementele* (o traducere latină obținută la Veneția, deși vorbea puțin latina), lucrările lui Pacioli despre matematică și artă, precum și lucrările importante despre arhitectură, proporție și perspectivă ale arhitectului roman Vitruvius și ale lui Leon Baptista Alberti (1404-1472).

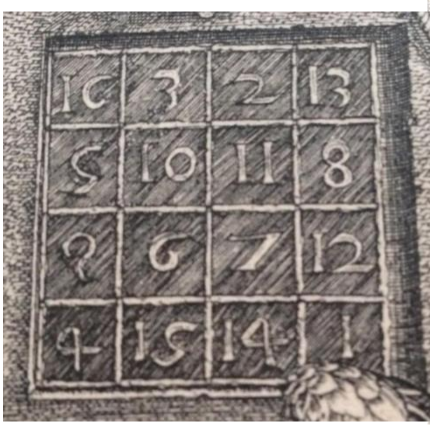
Contribuțiile lui Dürer la istoria Proporției de Aur vin ambele prin scrieri și prin pictură. Principalul său tratat, *Unterweisung der Messung mit dem Zirkel and Richtscheit* (Tratat despre măsurarea cu compasul și rigla-4 volume), a fost publicat în 1525 și a fost printre primele cărți de matematică publicate în limba germană. Aici, Dürer se plânge că prea mulți artiști nu cunosc geometrie, *„fără de care nimeni nu poate fi sau deveni un artist absolut*.” Primul volum oferă descrieri ale construcției diferitelor curbe, inclusiv spirala logaritmică (sau echiunghiulară), care este, după cum știm, strâns legată de Raportul de Aur. A doua carte conține metode precise și aproximative pentru construirea multor poligoane, inclusiv două construcții ale pentagonului (una exactă și una aproximativa). Solidele platonice, precum și alte solide, unele din invenția proprie a lui Dürer, împreună cu teoria perspectivei și a umbrelor, sunt discutate în cartea a patra. Cartea lui Dürer nu a fost destinată ca manual de geometrie. Mai degrabă, Dürer începe întotdeauna cu o aplicare practică și apoi continuă cu o expunere a aspectelor teoretice de bază. Cartea conține unele dintre primele prezentări ale poliedrelor desfășurate în plan.





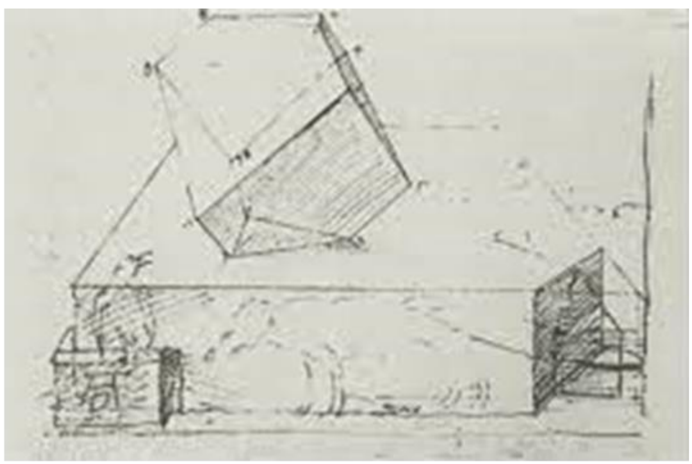


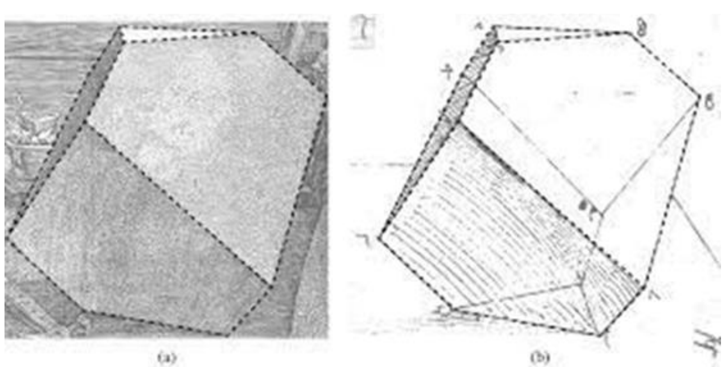
Dürer și-a amestecat virtuozitatea, cu interesul său pentru matematică în gravura pe metal-cupru, alegoria enigmatică „Melancolia”(muzeul de Stat-Berlin).



Aceasta este una din cele 3 gravuri magistrale (cealaltă două fiind „Cavalerul, Moartea și Diavolul” și „Sfântul Ieronim în studiul său”). Se pare că Dürer a creat imaginea într-o criză de melancolie, după moartea mamei sale. Figura centrală din „Melancolia” este o femeie înaripată, așezată aplecat și descurajată pe o margine de piatră. În mâna dreaptă ține un compas, deschis pentru măsurare. Majoritatea obiectele din gravură au multiple simboluri, sensuri și articole întregi au fost dedicate interpretării lor. Oala pe focul din mijloc stânga iar scara de sus reprezentă alchimie. „Pătratul magic” în dreapta sus (în care fiecare rând, coloană, diagonală, numerele din cele patru colțuri se adună la 34; se crede că reprezintă un număr Fibonacci). Intrările din mijloc în rândul de jos face 1514, data gravurii.

Scopul principal al gravurii, cu figurile sale geometrice, cheile, liliacul, peisajul marin par a fi reprezentarea melancoliei care îl învăluie pe artist, care sta pe gânduri, pe fondul îndoielilor cu privire la viață și viitor, în timp ce timpul, reprezentat de clepsidra din vârf, trece mai departe.





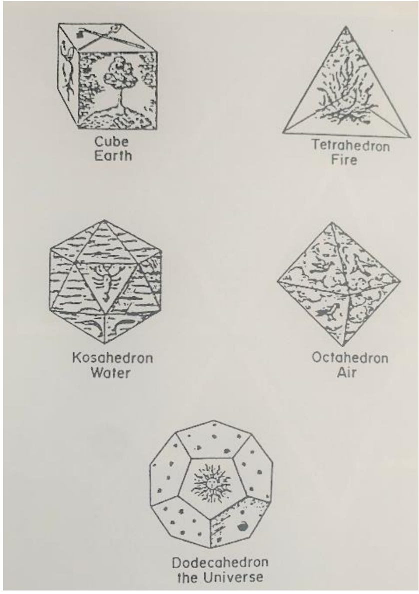
(a) (b)

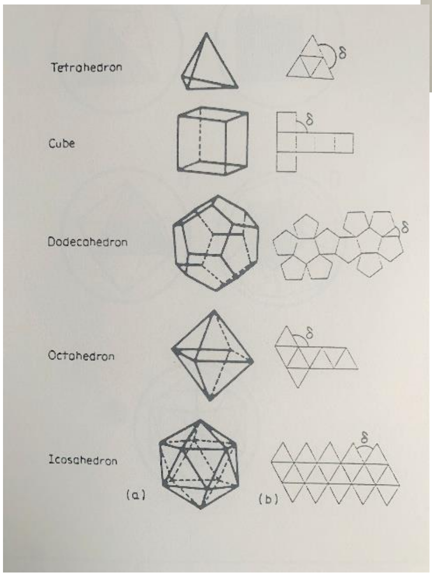
Solidul ciudat din mijlocul stâng al gravurii a fost subiect de discuție serioasă și diverse încercări de reconstrucție. La început vedere arată ca un cub din care au fost două colțuri opuse tăiat. Majoritatea cercetătorilor concluzionează că este cunoscut sub numele de *romboedru* (un solid cu șase laturi cu fiecare latură în formă de romb), care a fost trunchiat astfel încât poate fi circumscris de o sferă. Când se sprijină pe unul din triunghiul său fețe, fața sa se potrivește exact în pătratul magic. Unghiurile din față de solid au fost, de asemenea, o chestiune de dezbatere, Ce modalitate mai bună și-ar putea dovedi Dürer abilitatea în acest domeniu, decât să includă într-o gravură o formă atât de nouă și poate chiar unică, și să lase întrebarea (pentru alți geometriști), *ce a fost și de unde a venit*?

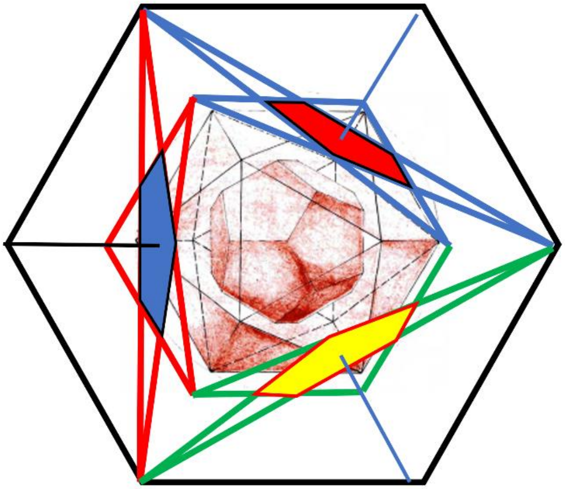
Cavalerul, Moartea și Diavolul-1513
(Cabinetul de stampe-Strassbourg)

Sfântul Ieronim în studiul său-1514
(national Gallery-Edinburh-Scotland)

Cu excepția operei influente a lui Pacioli și a interpretărilor matematice-artistice ale pictorilor Leonardo și Dürer, secolul al XVI-lea nu a adus alte evoluții surprinzătoare în povestea Raportului de Aur. În timp ce câțiva matematicieni, inclusiv italianul **Rafael Bombelli** (1526-1572) și spaniolul **Franciscus Flussates Candalla** (1502-1594) au folosit raportul de aur într-o varietate de probleme care implică pentagonul și solidele platonice, dar aplicațiile interesante au trebuit să aștepte chiar sfârșitul secolului. Cu toate acestea, lucrările lui Pacioli, Dürer și alții au reînviat interesul pentru platonism și pitagorism. Dintr-o dată, intelectualii Renașterii au văzut o oportunitate reală de a raporta matematica și logica rațională la universul din jurul lor, în spiritul viziunii platonice asupra lumii. Concepte precum „Proporția Divină” au construit, pe de o parte, o punte între matematică și funcționarea cosmosului și, pe de altă parte, o relația dintre fizică, teologie și metafizică.

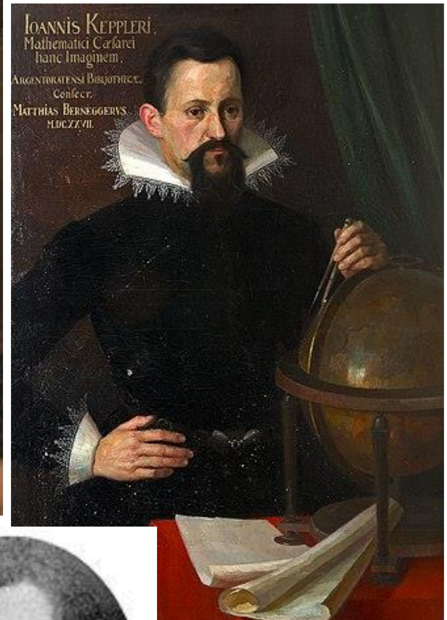






Persoana care, în ideile și lucrările sale, exemplifica mai mult decât oricare altul acest fascinant amestec de matematică și religie a fost **Johannes Kepler** (1571-1630)

Casa natală din Weil



Kepler și soția sa Barbara

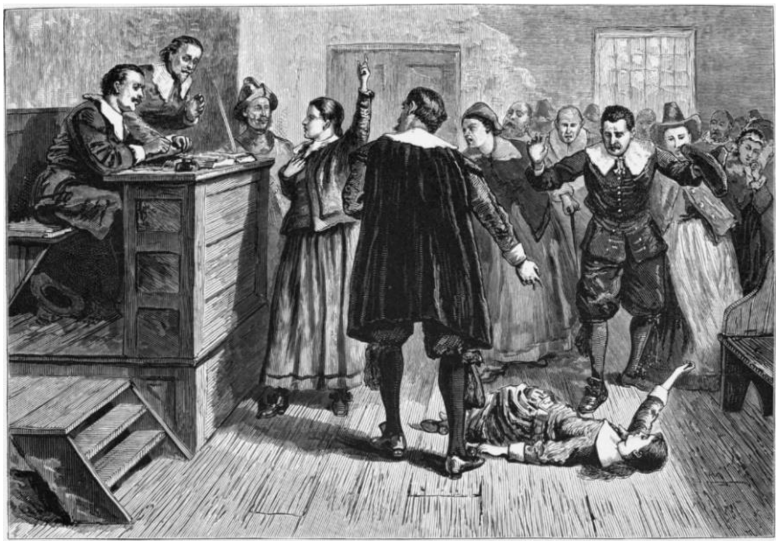
Johannes Kepler este cel mai bine amintit ca un astronom remarcabil responsabil (printre altele) pentru cele trei legi ale mișcării planetare. care îi poartă numele. Dar Kepler a fost și un matematician talentat, a metafizic speculativ și un autor prolific. Născut într-o perioadă de mare tulburări politice și haos religios, educația, viața lui Kepler și gândirea au fost modelate critic de evenimentele din jurul lui.

Kepler era născut la 27 decembrie 1571, în Orașul imperial Weil der Stadt Germania (acum parte a Regiunii Stuttgart, districtul Baden Wurtemberg, 30 km depărtare de Stuttgart), în casa bunicului său Sebald. Tatăl său, Heinrich, un soldat mercenar, a lipsit de acasă în cea mai mare parte a copilărie lui Kepler, iar în timpul scurtelor sale vizite a fost văzut ca „ răufăcător, mânios și certăreț.” Tatăl a plecat de acasă când Kepler avea vreo șaisprezece ani, și nu l-a mai văzut niciodată. Se presupune că a participat la un război naval pentru Regatul Napoli și că a murit mai departe în drumul lui spre casă. În consecință, Kepler a fost crescut mai ales de mama sa, Katharina, care lucra în hanul tatălui ei.
La vârsta de șase ani, a observat Marea Cometă din 1577, scriind că „a fost dus de mama [sa] într-un loc înalt pentru a o privi.” În 1580, la vârsta de nouă ani, a observat un alt

eveniment astronomic, un eclipsă de lună, înregistrând că și-a amintit că a fost „chemat în aer liber” pentru a o vedea și că Luna „a apărut destul de roșie”. Cu toate acestea, variola din copilărie l-a lăsat cu vedere slabă și mâini infirme, limitându-i capacitatea în aspectele de observație ale astronomiei.

Katharina însăși a fost o femeie destul de ciudată și neplăcută, care strângea ierburi și credea în puterile lor magice de vindecare. O serie de evenimente care implică personal ranchiunele, bârfele nefericite și lăcomia au condus în cele din urmă la arestarea ei la bătrânețe în 1620 și la acuzație de vrăjitorie. Asemenea situații nu erau neobișnuite la acea vreme, nu mai puțin de 38 de femei au fost executate pentru vrăjitorie în Weil, în anii dintre 1615 și 1629. Kepler, care era deja bine cunoscut pe vremea ei, a reacționat la vestea procesului mamei sale „cu nespusă suferință.” El s-a ocupat efectiv de apărarea ei, care a durat 6 ani, solicitând ajutorul la facultatea juridică de la Universitatea din Tübingen. În cele din urmă, Katharina Kepler a fost eliberată după o lungă încercare, în principal în lumina propriei ei mărturii, sub amenințarea unei mari dureri și torturi. Această poveste transmite atmosfera și confuzia intelectuală care a predominat în perioada lucrării științifice a lui Kepler.

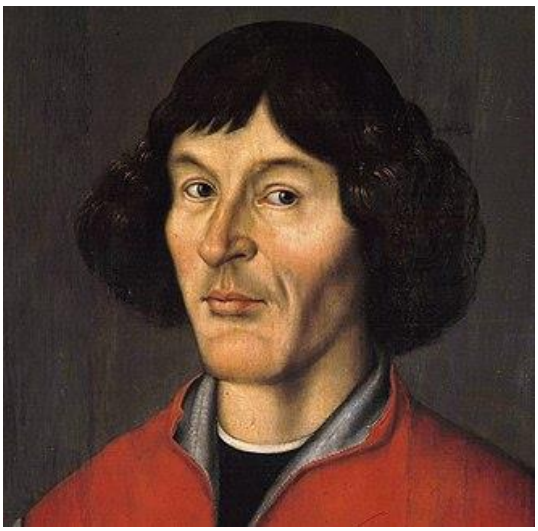
Katharina Kepler- statuie în Güglingen și scena de proces-vrăjitorie sec XVII

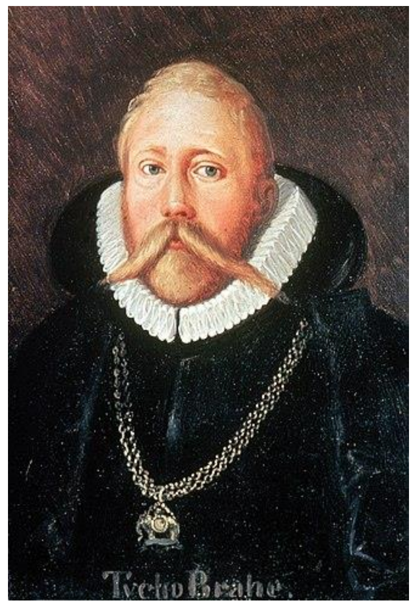


Kepler s-a născut într-o societate, care a trecut (cu doar cincizeci de ani mai devreme) prin reforma lui Martin Luther, care s-a rupt de biserica catolică, proclamând că singura justificare a oamenilor în fața lui Dumnezeu este credința. Rămânem uimiți cum, cu această experiență și cu violentele suișuri și coborâșuri ale vieții sale tumultoase, Kepler a reușit să facă o descoperire, care este considerată de mulți drept adevărata naștere a științei moderne.

Kepler și-a început studiile la seminarul superior protestant de la Maulbronn și apoi a câștigat o bursă de la Ducele de Württemberg pentru a urma la Seminarul luteran de la Universitatea din Tübingen în 1589. Cele 2 subiecte care l-au atras cel mai mult și care în mintea lui erau strâns legate, au fost teologia și matematica. Pe vremea aceea astronomia era considerată parte a matematicii și profesorul de astronomie al lui Kepler a fost marele astronom Michael Maestlin (1550-1631), cu care a continuat să mențină legătura chiar și după ce a părăsit Tübingen. În lecțiile sale, Maestlin trebuie să fi predat doar tradiționalul Sistemul ptolemaic sau geocentric, în care planetele se învârteau în jurul staționarului Pământ. Cu toate acestea, Maestlin cunoștea pe deplin sistemul helio-centric al lui **Nicolaus Copernicus**, (1473-1543), care a fost publicat în 1543 și, în privat, a discutat despre meritele unui astfel de sistem cu studentul său favorit, Kepler.

Copernicus-polonez și Tycho Brahe(1546-1601) -danez





În Sistemul lui Copernic, șase planete se învârtesc în jurul Soarelui. Kepler a îmbrățișat imediat acest sistem. Ideea fundamentală a acestei cosmologii, aceea a unui Soare central înconjurat de o sferă de stele fixe cu un spațiu între sferă și Soare, se potrivesc perfect în viziunea lui asupra cosmosului. Fiind o persoană profund religioasă, Kepler credea că universul reprezintă o reflectare a Creatorului său. Unitatea Soarelui, a stelelor și a spațiul intermediar simboliza pentru el o echivalență cu Sfânta Treime a Tatălui, Fiului și Duhului Sfânt.

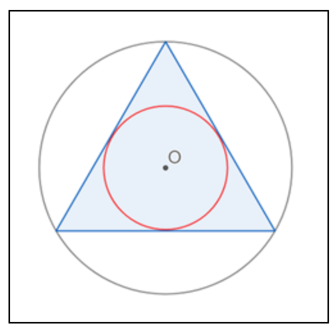
În timp ce Kepler a absolvit cu distincție Facultatea de Arte și era aproape de a-și termina studiile teologice, s-a întâmplat ceva care i-a schimbat profesia din cea teologică în cea de profesor de matematică. În ciuda dorinței sale de a deveni pastor, aproape de sfârșitul studiilor, Kepler a fost recomandat pentru un post de profesor de matematică și astronomie la școala protestantă din Graz. A acceptat funcția în aprilie 1594, la vârsta de 22 de ani.

Seminarul protestant din Graz, Austria, a cerut Universității din Tübingen să recomande un înlocuitor pentru unul dintre profesorii lor de matematică care a murit, iar universitatea l-a ales pe Kepler. În martie din 1594 Kepler a început așadar, fără să vrea, o călătorie de o lună la Graz, în provincia austriacă Styria.

Dându-și seama că soarta îl forțase să urmeze cariera de matematician, Kepler s-a hotărât să-și îndeplinească ceea ce el considera ca fiind datoria sa creștină, să înțeleagă creația lui Dumnezeu, universul. În consecință, el a aprofundat traducerile *Elementelor* (Euclid) și lucrările geometrilor greci Apollonius și Pappus. Acceptând principiul general al sistemului heliocentric, a pornit să caute răspunsuri la următoarele două întrebări majore: *De ce au existat tocmai șase planete*? și *Ce anume a determinat că orbitele planetare ar fi distanțate așa cum sunt*? Aceste întrebări „de ce" și „ce" au fost cu totul noi în vocabularul astronomic. Spre deosebire de astronomii dinaintea lui, care s-au mulțumit doar să înregistreze pozițiile observate ale planetelor, Kepler căuta o teorie care să explice totul. El a exprimat frumos această nouă abordare a cercetării umane:

În cunoaștere se întâmplă ca, pornind de la acele lucruri care afectează simțurile, suntem duși de operarea minții, către lucruri superioare, care nu pot fi înțelese cu simțurile noastre. Același lucru se întâmplă și în astronomie, în care percepem în primul rând cu ochii diferitele poziții ale planetelor, în momente diferite și raționamentul apoi se impune asupra acestor observații și conduce mintea la recunoașterea formei universului.

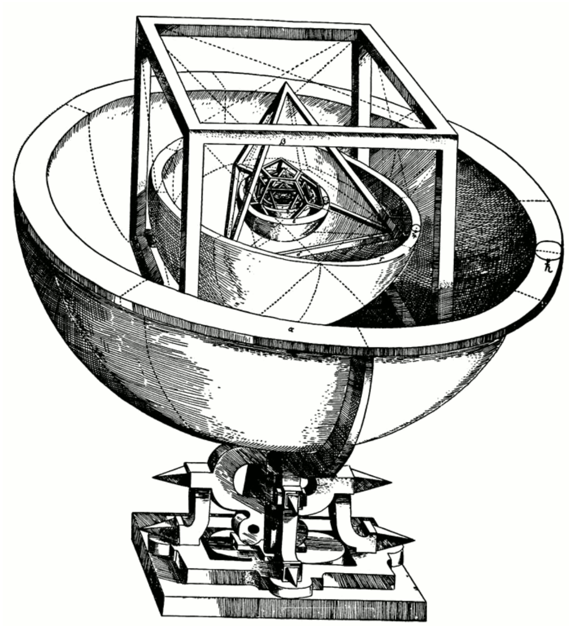
Dar, se întrebă Kepler, *ce instrument ar folosi Dumnezeu pentru a-și proiecta universul*? Prima privire a ceea ce urma să devină explicația lui absurd de fantastică la aceste întrebări cosmice i-a venit la iveală lui Kepler în 19 iulie 1595, când încerca să explice conjuncțiile planetelor exterioare, Jupiter și Saturn

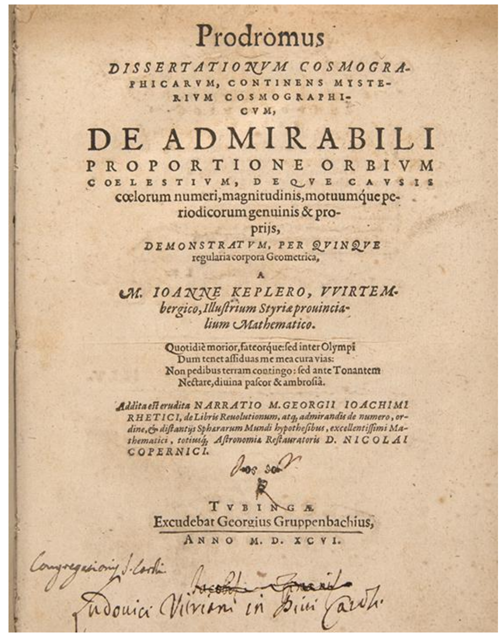


Practic, și-a dat seama că dacă a înscris un triunghi echilateral în interiorul unui cerc și un alt cerc în interiorul triunghiului, atunci raportul dintre raza cercului mare la raza celui mai mic era aproximativ același cu raportul dintre dimensiunile orbitei lui Saturn pe orbita lui Jupiter. Continuând cu această linie de gândire, el a decis că pentru a ajunge pe orbita lui Marte (următoarea planetă mai aproape de Soare), ar trebui să folosească următoarea figură geometrică, un pătrat, înscris în interiorul cercului mic. Făcând acest lucru, totuși, nu a ajuns la mărimea adevărată. Kepler nu a renunțat și fiind deja pe un drum inspirat de viziunea platoniciană, că „*Dumnezeu geometrizează întotdeauna*", era numai firesc pentru el să facă următorul pas geometric și să încerce figuri în spațiu. Ultimul exercițiu a avut ca rezultat prima utilizare de către Kepler a corpurilor geometrice legate de **Raportul de Aur**.

Kepler a dat răspunsul la cele două întrebări care l-au intrigat în primul său tratat, cunoscut sub numele de *Mysterium Cosmographicum* , care a fost publicat în 1597.

Din desenele lui Kepler, se văd corpurilor înscrise unul în altul-prin dualism, apoi sferele mare și mica, care se pare ca arata forma planetelor. Cubul-cel mai mare este primul, așa cum am mai arătat, el este structura și scheletul pe care se construiesc celelalte 4 poliedre.





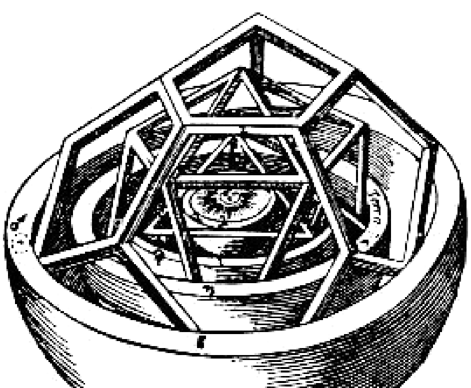
Prodromus
DISSERTATIONVM COSMOGRAPHICARVM, CONTINENS MYSTERIVM COSMOGRAPHICVM,
DE ADMIRABILI PROPORTIONE ORBIVM COELESTIVM, DEQVE CAVSIS cœlorum numeri, magnitudinis, motuumque periodicorum genuinis & proprijs,
DEMONSTRATVM, PER QVINQVE regularia corpora Geometrica,
A
M. IOANNE KEPLERO, VVIRTEMbergico, Illustrium Styriæ prouincialium Mathematico.

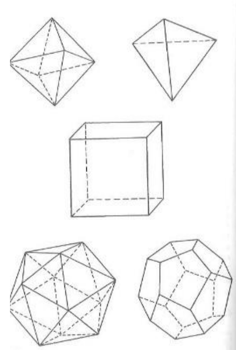
Quotidiè morior, fateorque: sed inter Olympi
Dum tenet assiduas me mea cura vias:
Non pedibus terram contingo: sed ante Tonantem
Nectare, diuina pascor & ambrosiâ.

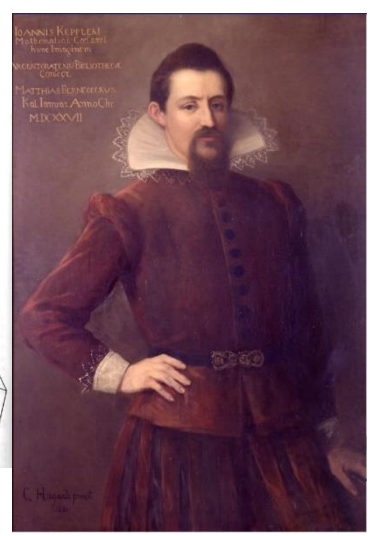
Addita est erudita NARRATIO M. GEORGII IOACHIMI RHETICI, de Libris Reuolutionum, atq; admirandis de numero, ordine, & distantijs Sphærarum Mundi hypothesibus, excellentissimi Mathematici, totiusq; Astronomiæ Restauratoris D. NICOLAI COPERNICI.

TVBINGÆ
Excudebat Georgius Gruppenbachius,
ANNO M. D. XCVI.

Titlul cărții spune : *„Un precursor al disertațiilor cosmografice, care conține misterul cosmic al proporțiilor admirabile ale sferelor cerești și al adevăratului și propriu-zis. Cauzele numerelor, dimensiunilor și mișcărilor periodice ale cerurilor. Demonstrat de cele cinci solide geometrice regulate*.”







Răspunsul lui Kepler la întrebarea de ce au existat șase planete (Mercur, Venus, Pământul, Marte, Jupiter, Saturn) a fost simplu: pentru că există exact **cinci solide platonice regulate**. Limitate, solidele determină șase distanțe, cu o sferă exterioară, care este granița corespunzătoare cerului. În plus, Modelul lui Kepler a fost conceput astfel încât să răspundă în același timp și la întrebarea cu privire la dimensiunile orbitelor.

Mysterium Cosmographicum al lui Kepler a dus la o întâlnire între el și Tycho Brahe la Praga, pe atunci sediul Sfântului Imperiu Roman. Întâlnirea a avut loc la 4 februarie 1600 și a fost preludiu la mutarea lui Kepler la Praga ca asistent al lui Tycho în octombrie din în același an (după ce a fost forțat să plece din Graz-ul catolic, din cauza credinței lui luterane).

La sfârșitul lui septembrie 1600, familia Kepler a acceptat invitația lui **Tycho Brahe** și și-a mutat bagajele în orașul Praga, în două vagoane. Kepler a rămas acolo nederanjat din cauza credinței sale și, cu ajutorul lui Tycho Brahe, a acceptat un post de asistent la curtea imperială. Colaborarea celor doi oameni de știință la Praga și la Castelul Benatek s-a dovedit dificilă, deși diferitele lor talente s-au completat reciproc. Brahe a fost un observator excelent, dar abilitățile sale matematice erau limitate. Excelentul matematician Kepler, în schimb, a putut face observații precise. Performanța matematică a lui Kepler l-a deranjat pe Brache. Pentru a înrăutăți lucrurile, Brache a împărtășit doar parțial părerile astronomice ale lui Kepler (și ale lui Copernic). Când Brache a murit pe 24 octombrie 1601, Kepler a devenit matematicianul imperial. Tycho a lăsat un număr imens de observații, în special despre orbita lui Marte. Kepler au folosit aceste date pentru a descoperi primele două legi ale mișcărilor planetare, numite după el.

Matematician al curții imperiale din Praga (1600-1612)

Prima lege a lui Kepler spune că orbitele dintre planetele cunoscute din jurul Soarelui nu sunt cercuri exacte, ci mai degrabă elipse, cu Soarele la un. O elipsă are două puncte numite focare, astfel că suma distanțelor oricărui punct de pe elipsă față de cele două focarele este constantă.

A doua lege a lui Kepler stabilește că planeta se mișcă cel mai rapid când este cel mai aproape de Soare (punctul cunoscut sub numele de periheliu) și cel mai lent când este cel mai îndepărtat (afeliu), în așa fel încât linia care unește planeta cu Soarele mătură zone egale în intervale de timp egale

A fost nevoie de geniul lui Isaac Newton (1642-1727) pentru a arăta că forța care ține planetele pe orbitele lor este gravitația. Newton a explicat legile lui Kepler rezolvând împreună legile care descriu mișcarea corpurilor cu legea gravitației universale. El a arătat că orbitele eliptice cu viteze diferite reprezintă o soluție posibilă a acestor ecuații. Eforturile eroice ale lui Kepler în calculele orbitei lui Marte (multe sute de foi de aritmetică și interpretarea lor; numite de el drept „războiul meu cu Marte”) sunt considerate de mulți cercetători ca fiind nașterea științei moderne.

Anii lui Kepler la Praga au fost extrem de productivi atât în astronomie, cât și în matematică. Lucrarea matematică a lui Kepler a mai produs câteva puncte importante în istoria **Raportului de Aur**.

Combinația elementelor raționale cu credința creștină caracterizează toate eforturile lui Kepler. Ca un filozof creștin, Kepler a considerat este ca datoria lui de a înțelege universul împreună cu intențiile Creatorului lui. Ideile sale despre Sistemul Solar fuzionează puternic cu numărul 5, pe care l-a adoptat de la pitagoreeni .

Kepler scrie despre raportul de aur: *O particularitate a acestei proporții constă în faptul că o proporție similară poate fi construită din partea mai mare și întreg; ceea ce înainte era cea mai mare parte acum devine mai mic, ce a fost înainte întregul acum devine cea mai mare parte, iar suma de acestea două are acum raportul întregului.*

$(\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a})$ *Acest lucru continuă la nesfârșit; proporția divină rămânând mereu. Cred că această proporție geometrică a servit drept idee Creatorului când a creat Universul. El a creat asemănări din asemănare, care continuă și la nesfârșit. Văd numărul cinci în aproape toate florile care conduc calea pentru un fruct, adică pentru creație, și care există, nu de dragul lor propriu, ci de dragul fructelor care urmează. Aproape toate florile de copac pot fi incluse aici. Trebuie să exclud poate lămâile și portocalele, deși nu le-am văzut înflorirea și judec fructele sau boabele, care se împart mai departe în șapte, unsprezece sau nouă nuclee. Dar în geometrie, numărul cinci, adică pentagonul, este construit prin intermediul proporției divine, pe care doresc (și presupun a fi) prototipul pentru creație. Mai mult, există între mișcarea Soarelui (sau, după cum cred, Pământul) și cel al lui Venus, care se află la partea de sus a capacității generative. Raportul de 8 la 13 care, așa cum vom auzi, se apropie foarte mult de proporția divină. În sfârșit, conform lui Copernic, sfera Pământului se află la jumătatea distanței dintre sferele Marte și Venus. Se obține proporția dintre ele din dodecaedrul și icosaedrul, care în geometrie sunt ambele derivate ale proporției divine; pe Pământul nostru, totuși, are loc actul de procreare. Acum vedeți cum imaginea bărbatului și femeii provine din proporția divină. În opinia mea, înmulțirea plantelor și ale animalelor sunt în același raport cu cele geometrice, proporție reprezentată de segmente liniare și proporție aritmetică, exprimată numeric*.

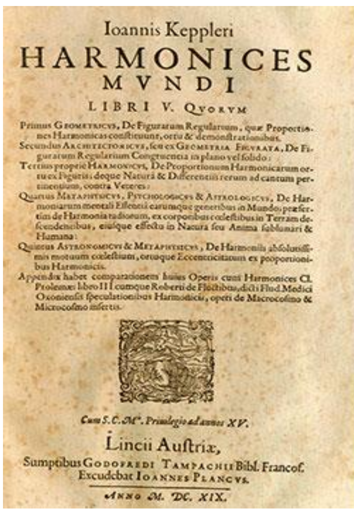
Pur și simplu spus, Kepler credea cu adevărat că Raportul de Aur servește ca drept instrument fundamental pentru Dumnezeu în crearea universului. Kepler era conștient de existența proporției de aur și a numerelor Fibonacci în aranjamentele de petale ale florilor.

Convins și mulțumit de efortul său Kepler scria:

Acesta a fost ocazia și succesul muncii mele. Și cât de intensă a fost plăcerea mea de la această descoperire nu poate fi niciodată exprimată în cuvinte. Nu am mai regretat timpul pierdut. Zi și noapte eram consumat de calculatoare să văd dacă această idee ar fi de acord *cu orbitele copernicane, sau dacă treaba mea va fi dusă de vânt... în câteva zile totul a funcționat și am văzut cum un corp după altul se potrivea exact. la locul său printre planete.*

Anii relativ liniștiți și fructuoși din punct de vedere profesional ai lui Kepler în Praga s-au încheiat în 1611 cu o serie de necazuri. În primul rând, fiul său Friedrich a murit de variolă, apoi soția sa, Barbara, a murit de o febră contagioasă adusă de trupele austriece de ocupație. În sfârșit, împăratul Rudolph a fost destituit, abdicând de la coroană în favoarea fratelui său Matthias, care nu era cunoscut pentru toleranța sa față de protestanți. Kepler a fost deci nevoit să plece la Linz în Austria.

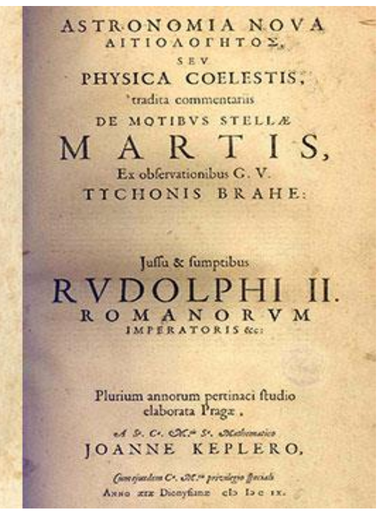
Cununa lucrărilor lui Kepler la Linz a venit în 1619, cu publicarea celei de-a doua lucrări majore despre cosmologie, **Harmonice Mundi** (Armonia lumii).



Ioannis Keppleri
HARMONICES
MVNDI
LIBRI V. QVORVM

Primus GEOMETRICVS, De Figurarum Regularium, quæ Proportiones Harmonicas constituunt, ortu & demonstrationibus.
Secundus ARCHITECTONICVS, seu ex GEOMETRIA FIGVRATA, De Figurarum Regularium Congruentia in plano vel solido:
Tertius propriè HARMONICVS, De Proportionum Harmonicarum ortu ex Figuris; deque Naturâ & Differentiis rerum ad cantum pertinentium, contra Veteres:
Quartus METAPHYSICVS, PSYCHOLOGICVS & ASTROLOGICVS, De Harmoniarum mentali Essentiâ earumque generibus in Mundo; præsertim de Harmonia radiorum, ex corporibus cœlestibus in Terram descendentibus, eiusque effectu in Natura seu Anima sublunari & Humana:
Quintus ASTRONOMICVS & METAPHYSICVS, De Harmoniis absolutissimis motuum cœlestium, ortuque Eccentricitatum ex proportionibus Harmonicis.
Appendix habet comparationem huius Operis cum Harmonices Cl. Ptolemæi libro III cumque Roberti de Fluctibus, dicti Flud Medici Oxoniensis speculationibus Harmonicis, operi de Macrocosmo & Microcosmo insertis.

Cum S. C. M^{tis}. Privilegio ad annos XV.
Lincii Austriæ,
Sumptibus GODOFREDI TAMPACHII Bibl. Francof.
Excudebat IOANNES PLANCVS.
ANNO M. DC. XIX.



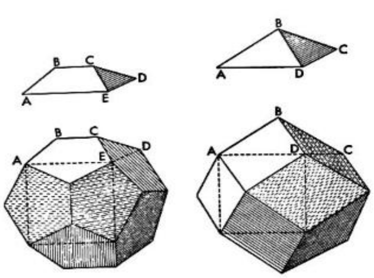
ASTRONOMIA NOVA
ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΤΟΣ,
SEV
PHYSICA COELESTIS,
tradita commentariis
DE MOTIBVS STELLÆ
MARTIS,
Ex observationibus G. V.
TYCHONIS BRAHE:

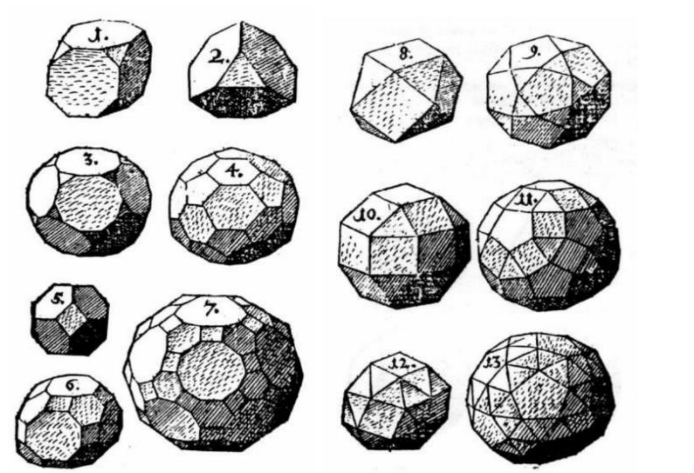
Jussu & sumptibus
RVDOLPHI II.
ROMANORVM
IMPERATORIS &c:

Plurium annorum pertinaci studio
elaborata Pragæ,
A S. C. M^{tis}. S^{ti}. Mathematico
JOANNE KEPLERO,

Cum ejusdem C. M^{tis}. privilegio speciali
ANNO æræ Dionysianæ cIɔ Iɔc IX.

Armonia lumii și poliedrele lui Arhimede (13), pornite de la poliedrele de bază





În această lucrare, Kepler a vorbit despre o lege armonică. El credea că dezvăluie o armonie muzicală pe care Dumnezeu a imortalizat-o în sistemul solar.

„Sunt cuprins de o răpire inexprimabilă la spectacolul divin al armoniei cerești. Căci vedem aici cum Dumnezeu, asemenea unui maestru ziditor uman, s-a apropiat de întemeierea lumii conform ordinii și stăpânirii.”

Kepler împarte *Armonia lumii* în cinci capitole lungi:

-primul este despre poligoane regulate;

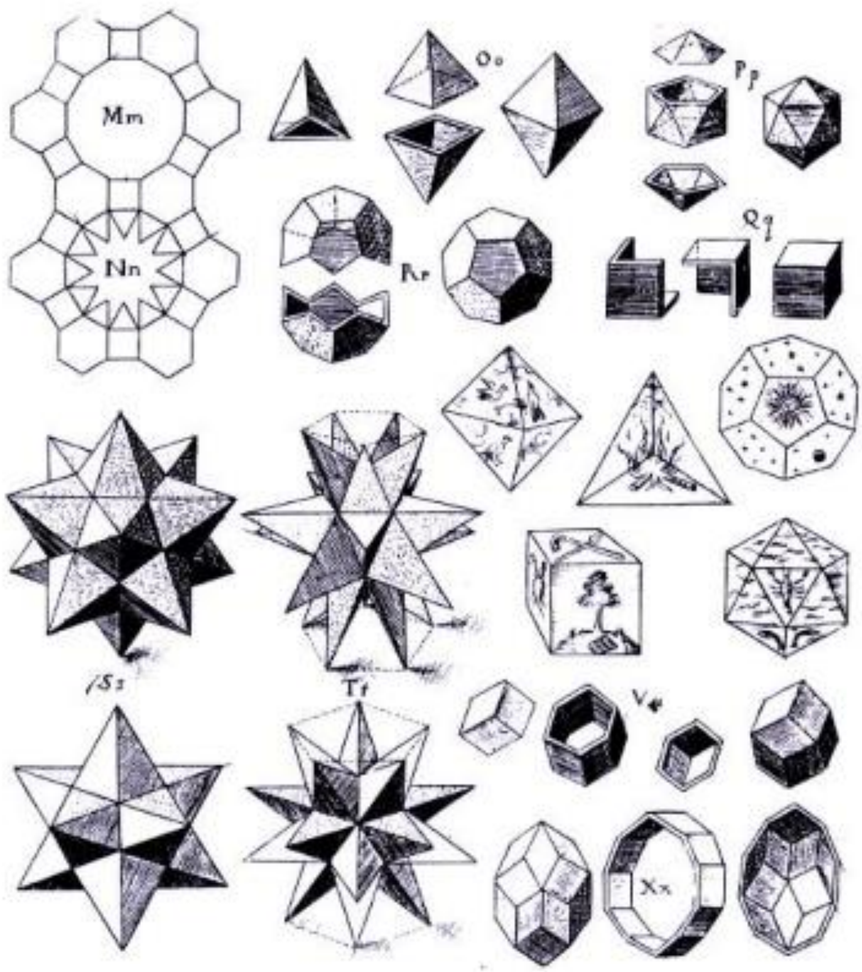
-a doua este pe congruența figurilor;

-a treia este despre originea proporțiilor armonice în muzică;

-a patra este despre configurațiile armonice în astrologie;

-a cincea este pe armonia mișcărilor planetelor.

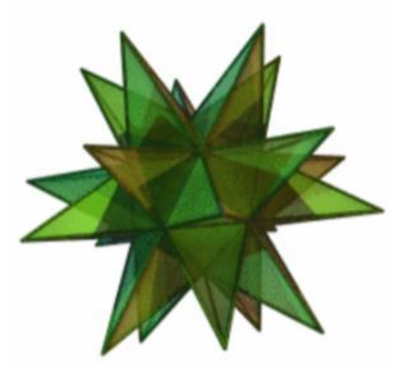
Capitolele 1 și 2 conțin majoritatea contribuțiilor lui Kepler referitoare la poliedre.



Diverse poliedre, stelate și altele noi, numite poliedrele lui Kepler (Armonia Lumii) :

Din desene se vede încă ideea veche preluată de la greci, cu cele 5 poliedre-simboluri. Kepler îmbină munca sa științifică, bazată pe măsurători și observații cu ideile platonice, confuze și mistice.

El este interesat în primul rând de modul în care poligoane, pe care le definește ca fiind regulate sau semi regulate, pot ajunge să fie fixate împreună în jurul unui punct central pe un plan pentru a forma congruență-egalitate. Obiectivul său principal a fost să fie capabil să clasifice poligoane pe baza unei măsuri de sociabilitate, sau mai degrabă, a capacității lor de a forma congruență-egalitate parțială, atunci când sunt combinate cu alte poliedre.



În al doilea capitol este cea mai veche înțelegere matematică a două tipuri de poliedre stelare regulate, **dodecaedrul stelat mic și mare** (mai sus) ; ele vor fi numite mai târziu Poliedre Kepler și, împreună cu două poliedre regulate descoperite de Louis Poinsot (1777 –1859- savant francez care a inventat mecanica geometrică), ca poliedre Kepler-Poinsot . El descrie poliedrele în ceea ce privește fețele lor, similar cu modelul folosit în Timeus al lui Platon, pentru a descrie formarea solidelor platonice cu triunghiuri de bază.

Cartea prezintă ilustrații de solide și modele de plăci-*mozaicuri*, dintre care unele sunt legate de raportul de aur. În timp ce filozofii medievali vorbeau metaforic despre „muzica sferelor”, Kepler a descoperit armonii fizice-muzicale în mișcarea planetară.

În Biblie se spune ca stelele cântă cu oamenii: *unde erai tu când am întemeiat pământul? ...atunci când stelele dimineții izbucneau în cântări de bucurie și când toți fiii lui Dumnezeu scoteau strigate de veselie?* (Iov 38,4-7)

El a descoperit că diferența dintre vitezele unghiulare maxime și minime ale unei planete pe orbita se aproximează la o proporție armonică. De exemplu, viteza unghiulară maximă a Pământului măsurată de la Soare variază cu un semiton (un raport de 16:15), de la **mi** la **fa**, între afeliu și periheliu (distantele minimă și maximă de la pământ la soare). Venus variază doar cu un interval mic de 25:24 (numit diezi în termeni muzicali).

Kepler explică motivul micului interval armonic al Pământului: *Pământul cântă Mi, Fa, Mi: poți deduce chiar și din silabele că în această casă a noastră mizeria și foametea sunt prezente*.

Corul ceresc pe care l-a format Kepler era alcătuit dintr-un tenor (Marte), doi bași (Saturn și Jupiter), o soprană (Mercur) și alți doi (Venus și Pământ). Mercur, cu orbita sa eliptică mare, s-a arătat că poate produce cel mai mare număr de note, în timp ce Venus era capabilă doar de o singură notă, deoarece orbita sa este aproape un cerc.

La intervale foarte rare, toate planetele cântau împreună într-o „armonie perfectă”: Kepler a propus că acest lucru s-ar fi întâmplat o singură dată în istorie, poate la momentul creației.

Kepler ne amintește că ordinea armonică este mimată doar de om, dar are originea în alinierea corpurilor cerești:

În consecință, nu vă veți mai mira că o ordine foarte excelentă de sunete sau înălțimi într-un sistem muzical, sau o scară, a fost stabilită de oameni, deoarece vedeți că ei nu fac nimic altceva în această afacere decât să cânte ca și maimuțele lui Dumnezeu, Creatorul și să joace, parcă, o anumită dramă a creației mișcărilor cerești.

. ...„Sunt cuprins de o răpire inexprimabilă la spectacolul divin al armoniei cerești. Căci vedem aici cum Dumnezeu, asemenea unui maestru ziditor uman, s-a apropiat de întemeierea lumii conform ordinii și stăpânirii.”

În cartea a V-a Kepler descoperă că toate, cu excepția unuia dintre rapoartele vitezei maxime și minime ale planetelor de pe orbite învecinate, aproximează armoniile muzicale într-o limită de eroare mai mică decât un diez (un interval de 25:24). Orbitele lui Marte și Jupiter produc singura excepție de la această regulă, creând raportul ne-armonic de 18:19.

Capitolul 5 include o lungă descriere despre astrologie. Aceasta este urmată imediat de cea de-a treia lege a mișcării planetare a lui Kepler, care arată

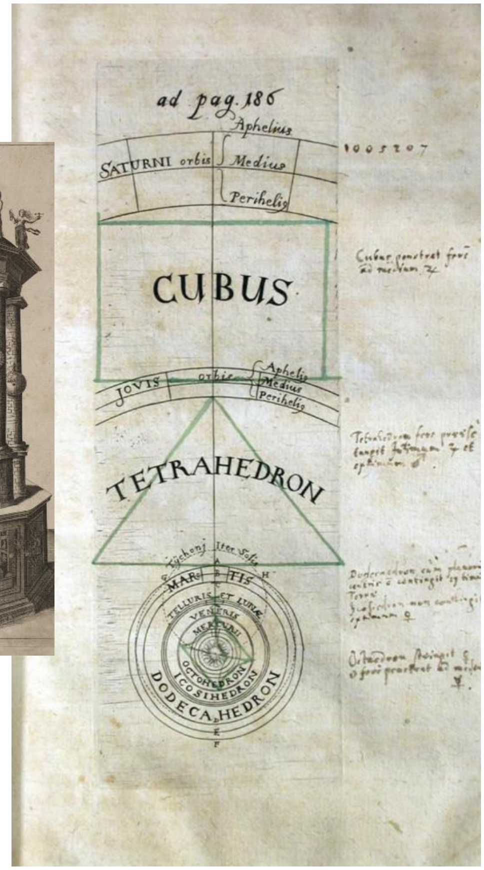
Raportul dintre pătratul perioadei orbitale a unui obiect cu cubul semiaxei majore a orbitei sale este același pentru toate obiectele care orbitează la fel. .(O proporționalitate constantă între cubul semi-axei majore a orbitei unei planete și pătratul timpului perioadei sale orbitale).

Cartea anterioară a lui Kepler, *Astronomia nova*, relata descoperirea primelor două principii cunoscute acum sub numele de legile lui Kepler.

Spre sfârșitul vieții sale agitate, Johannes Kepler a publicat ultima sa lucrare majoră, **Tabulae Rudolfinae** (Tabelele Rudolfice), la Ulm în 1627. El a evaluat notele lui Tycho Brahe și a descris pozițiile planetelor cu o acuratețe fără precedent. Erorile medii au fost reduse la aproximativ 1/30 din valorile anterioare. Aceste tabele planetare și legile mecanice cerești expuse în *Epitome* (rezumat-cuprins) au format cel mai convingător model de argumentare pentru heliocentrismul contemporan și mai târziu au servit lui Isaac Newton ca bază pentru derivarea teoriei gravitației.

Kepler și Brahe-monument-Praga

Tabulae Rudolfinae



Corpurile platonice-Harmonice mundi

Kepler a murit la 15 noiembrie 1630 și a fost înmormântat la Regensburg. Potrivit vieții lui tulburi, războaiele au distrus total mormântul lui, fără urmă. Din fericire, o schiță după piatră funerară, făcută de un prieten a supraviețuit și conține Epitaful lui Kepler:

Măsuram cerurile, Acum măsor umbrele Pământului Mintea mea era în ceruri, Acum umbra corpului meu se odihnește aici.

Astăzi, originalitatea și productivitatea lui Kepler sunt greu de înțeles. Ar trebui să ne dăm seama că el a fost un om care a îndurat uriașe greutăți personale, inclusiv pierderea a trei dintre copiii săi în mai puțin peste șase luni în anii 1617 și 1618.

Kepler a fost corectat de Newton care a explicat matematic distanta dintre planete, prin legea gravitației. Kepler a fost un temerar, visător, dar și pasionat de Biblie, de legile divine și de matematica.

Închei cu încă o provocare intelectuală și cu soluția ei. De ce sunt numai 5 poliedre regulate? Iată rezolvarea:

Reținem că numărul de muchii (M) a două poliedre duale este același, iar numărul de vârfuri (V) ale unui dual este numărul de fețe(F) ale celuilalt dual (Euler: V+F=M+2. De exemplu, duala unei prisme triunghiulare este o piramidă triunghiulară (2 piramide triunghiulare cu bazele atașate).

Dovada că există doar cinci solide platonice:

-pentru a avea un poliedru, cel puțin trei fețe sunt la fiecare vârf (3 plane se taie într-un punct).

-suma unghiurilor de la fiecare vârf trebuie să fie mai mică de 360 de grade.

-solidele platonice folosesc numai fețe poligonale obișnuite și este folosit un singur tip în fiecare.

Dacă folosim un hexagon obișnuit (6x6=360 grade) sau un poligon obișnuit cu mai mult de 5 laturi, se va încălca una dintre regulile enumerate mai sus. Astfel, solidele platonice sunt formate doar din **pentagoane** regulate (72 grade unghiul dintre laturi), **patrulatere** (90 grade unghiul dintre laturi) și **triunghiuri** (60 grade unghiul dintre laturi).

Putem încadra trei pentagoane în jurul unui punct și nu mai mult (3x72=216-dodecaedrul), așa că avem unul până acum. Putem potrivi doar trei pătrate în jurul unui punct și nu mai mult (3x90=270-cubul), așa că acum avem două. Putem potrivi de la trei (3x60=180-tetraedrul), patru (4x60=240-octaedrul) până la cinci triunghiuri echilaterale în jurul unui punct, dar nu mai mult (5x60=300-icosaedrul). Aceasta adaugă încă trei, așa că avem un total de **cinci**. Am epuizat toate cazurile, așa că acestea sunt singurele **cinci**, care sunt prezentate mai sus.

Deci avem 3x90=270 (cubul), 3x60=180 (tetraedrul), 4x60=240 (octaedrul), 5x60=300 (icosaedrul), 3x72=216 (dodecaedrul)

Am parcurs geometria și istoria poliedrelor regulate. M-am oprit mai mult la ultimele două, care sunt fascinante, ca formă, proprietăți și construcție. Ele sunt guvernate de raportul de aur (de la pentagon) și de cub. Primele 3 sunt mai simple și se studiază în școlile primare, la geometrie. După cum am văzut, cubul le guvernează pe toate, căci pe scheletul lui se construiesc toate. Provocarea mea a fost sa le înscriu pe toate în aceeași sferă. Mulți geometrii, începând cu grecii, le-au pus pe rând în sferă, sau le-au obținut pe unul din altul prin dualitate, sau pornind dintr-un cub. Am folosit **logos**-ul reducere-constrângere și am redus cubul mare-roșu (de la icosaedru) la unul mai mic-verde (la dodecaedru) în așa fel ca toate sa intre în aceeași sferă. Fără ajutorul programului geogebra, n-as fi reușit această performanță. Am lucrat cu 4 zecimale, suficiente ca sa obțin toate vârfurile pe aceeași sferă.

Am adus ca noutate și viețile marilor geometrii și artiști care s-au ocupat de poliedre, dar mai ales, am scos la lumina și adevărurile care sunt găsite în Biblie (despre dualitate, cub și 4 dimensiuni). Studiul poliedrelor este inclus într-un volum încă neterminat-*Adevărul și Frumosul*, care cuprinde Frumosul în armonie cu Adevărul. Imaginea poliedrelor, care se rotesc în aceeași sferă se împletește cu adevărul matematic, exprimat prin ecuații, prin rapoarte, care reprezintă logos-ul-proporția, măsura exactă. Aceste doua fețe, prezentate mai sus se regăsesc în persoana divina a Dumnezeirii și anume în Fiul lui Dumnezeu, Domnul Isus. El este **Adevărul** (Ioan 14,7), dar și **Cel mai Frumos** dintre oameni (Psalmul 45,2)